Snow666

MAKRON
Books

CÁLCULO C

3ª Edição

Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície

Mirian Buss Gonçalves, Dra.

- Professora do Departamento de Matemática da UFSC nas disciplinas de Cálculo e Análise Matemática.
- Professora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção/UFSC.
- Mestrado em Matemática Pura/Análise Matemática/UFSC.
- Doutorado em Engenharia de Produção/UFSC.
- Pós-Doutorado no INSA-Rouen/FR.

Diva Marília Flemming, Dra.

- Professora do Centro de Ciências Exatas da UNISUL nas disciplinas de Cálculo e Tecnologia na Educação.
- Professora do Curso de Pós-Graduação em Educação da UNISUL.
- Professora aposentada do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil/UFSC.
- Professora aposentada do Departamento de Matemática da UFSC nas disciplinas de Cálculo e Teoria de Informação.
- Mestrado em Matemática Aplicada/Teoria de Informação.
- Doutorado em Engenharia de Produção/UFSC.

MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda.
Rua Tabapuã, 1.348 – Itaim-Bibi
CEP 04533-004 – São Paulo – SP
(011) 829-8604 e (011) 820-6622
e-mail: makron@books.com.br

São Paulo • Rio de Janeiro • Ribeirão Preto • Belém • Belo Horizonte • Brasília • Campo Grande • Cuiabá • Curitiba • Florianópolis • Fortaleza • Goiânia • Manaus • Natal • Porto Alegre • Recife • Salvador

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Ciudad de Mexico • Frankfurt • Guadalajara • Lisboa • London • Madrid • Montevideo • New York • Paris • Porto • Santiago

Snow666

Cálculo C: Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície -- 3ª edição

Copyright© 2000 MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda.

Todos os direitos para a língua portuguesa reservados pela MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema "retrieval" ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico, de fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização, por escrito, da Editora.

EDITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPÇÃO FILHO

Gerente de Produção
Silas Camargo
Editor Assistente
Benjamim Peixoto
Produtora Editorial
Marileide Gomes
Capa
Marcelo da S. Françozo

Editoração e Fotolitos em Alta Resolução: J.A.G.

Dados de Catalogação na Publicação

Gonçalves, Mirian Buss
Cálculo C: Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície – 3ª edição ; Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming. São Paulo : MAKRON *Books*, 2000.

ISBN: 85.346.0955-1

MAKRON *Books*

NOTA AO LEITOR – 1ª Edição

A falta de textos, ao alcance de nossos alunos, que abordem o Cálculo Vetorial de uma forma mais abrangente, nos motivou a escrever o presente livro. Este livro pode ser utilizado nos cursos de Cálculo, cujo programa prevê o estudo das Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas e Integrais de Superfície.

O texto consiste de seis capítulos. Os dois primeiros capítulos, referentes a Funções Vetoriais de uma Variável e Curvas, são pré-requisitos para o estudo das Integrais Curvilíneas, apresentado no Capítulo V. No Capítulo III são estendidos os conceitos do Cálculo para as Funções Vetoriais de Várias Variáveis. No Capítulo IV são exploradas as Idéias Físicas ligadas ao Cálculo Vetorial. O Capítulo VI inicia com o estudo de Superfícies e a seguir as Integrais de Superfície são apresentadas.

Cada capítulo apresenta enunciados claros das definições, propriedades e teoremas relativos ao assunto abordado. No decorrer de todo o texto, as idéias intuitivas e geométricas são realçadas. As figuras apresentadas no decorrer dos exemplos, facilitam a visualização espacial dos conceitos apresentados. São propostas listas de exercícios, com respostas, para complementar a aprendizagem do aluno. Algumas demonstrações de teoremas, que foram omitidas, podem ser encontradas em livros mais avançados.

Quaisquer erros que apareçam são, naturalmente, da responsabilidade das autoras, as quais ficarão muito agradecidas se forem comunicadas sobre os mesmos.

Florianópolis, agosto de 1991.

Mirian Buss Gonçalves
Diva Marília Flemming

Snow666

MAKRON
Books

NOTA AO LEITOR – 3ª Edição

Este livro foi lançado em 1992 e desde então vem sendo utilizado como livro texto para alunos dos cursos de Matemática, Física e Engenharia, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral que abordam funções vetoriais, integrais curvilíneas e integrais de superfície.

Considerando algumas sugestões recebidas, pequenas alterações foram feitas no decorrer do texto. Dessa forma, em relação ao conteúdo, esta nova edição não apresenta alterações significativas. A principal mudança, nesta terceira edição, é a melhoria da qualidade da apresentação do texto e figuras.

Como nas edições anteriores, quaisquer erros que apareçam são, naturalmente, da responsabilidade das autoras, as quais ficarão muito agradecidas se forem comunicadas sobre os mesmos.

Florianópolis, setembro de 1999.

Mirian Buss Gonçalves
Diva Marília Flemming

Snow666

MAKRON Books

AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, que com seu incentivo e sugestões, contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradecem aos Professores Carlos José Ferraris, Inder Jeet Taneja, Ito Pedro de Souza, Licério Brasil da Silva, Maria da Graça Rodrigues, Miguel Pelandré Perez, Waldir Quandt e William Glenn Whitley pela sua contribuição.

Em especial, agradecem ao Professor Jaime Bruck Ripoll, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que leu todos os manuscritos e apresentou valiosas sugestões.

Finalmente, agradecem ao acadêmico de Engenharia Mecânica, Jean Carlo Gueths, ex-aluno das autoras, pela sua dedicação na confecção das figuras.

Snow666

MAKRON Books

SUMÁRIO

Capítulo 1 – FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL 1

Hodógrafo 3
Operações com Funções Vetoriais 7
Limite e Continuidade 9
Exercícios 16
Derivada 21
Interpretação Geométrica da Derivada 22
Interpretação Física da Derivada 25
Regras de Derivação 29
Derivadas Sucessivas 30
Exercícios 31

Capítulo 2 – CURVAS 37

Representação Paramétrica 37
Parametrização de uma Reta 39
Parametrização de uma Circunferência 41
Parametrização de uma Elipse 44
Parametrização de uma Hélice Circular 47
Parametrização de uma Ciclóide 50
Parametrização de uma Hipociclóide 51
Parametrização de outras curvas 55
Curvas Suaves 59
Orientação de uma Curva 62
Reta Tangente 67
Exercícios 70
Comprimento de Arco 75
Reparametrização de Curvas por Comprimento de Arco 80
Vetor Tangente Unitário 83
Curvatura 88
Vetor Normal Principal 94
Vetor Binormal 97
Torção 101

Aplicações 105
Componentes Tangencial e Normal da Aceleração 105
Fórmulas de Frenet – Teorema Fundamental das Curvas 108
Exercícios 110

Capítulo 3 – FUNÇÕES VETORIAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS 117
Bolas Abertas e Fechadas 117
Conjunto Aberto 117
Domínios Conexos 119
Funções Vetoriais de Várias Variáveis 120
Limite e Continuidade 122
Derivadas Parciais 123
Interpretação Geométrica 126
Derivadas Parciais Sucessivas 127
Exercícios 131
Exercícios 134

Capítulo 4 – DERIVADA DIRECIONAL E CAMPOS GRADIENTES 139
Campos Escalares e Vetoriais 139
Representação Geométrica de um Campo Vetorial 142
Exercícios 147
Derivada Direcional de um Campo Escalar 149
Gradiente de um Campo Escalar 154
Interpretação Geométrica do Gradiente 158
Cálculo da Derivada Direcional usando o Gradiente 160
O Gradiente como Direção de Máxima Variação 163
Exemplos de Aplicações do Gradiente 164
Exercícios 173
Derivada Direcional de um Campo Vetorial 179
Interpretação Física 185
Divergência de um Campo Vetorial 186
Interpretação Física da Divergência 188
Rotacional de um Campo Vetorial 192
Interpretação Física do Rotacional 195
Campos Conservativos 199
Cálculo de uma Função Potencial 202
Algumas Identidades Vetoriais 206
Exercícios 207

Capítulo 5 – INTEGRAIS CURVILÍNEAS 215
Integrais de Linha de Campos Escalares 215
Aplicações 224
Massa e Centro de Massa de um Fio Delgado 224
Momento de Inércia 229
Lei de Biot-Savart 231

Exercícios 235
Integrais de Linha de Campos Vetoriais 240
Trabalho Realizado por uma Força 240
Definição 244
Exemplos 247
Exercícios 253
Integrais Curvilíneas Independentes do Caminho de Integração 258
Exercícios 274
Teorema de Green 279
Exercícios 287

Capítulo 6 – INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE 289
Representação de uma Superfície 289
Equações Paramétricas 292
Representação Paramétrica de Algumas Superfícies 294
Parametrização da Esfera 294
Parametrização de um Cilindro 298
Parametrização de um Cone 301
Parametrização de um Paraboloide 304
Parametrização de Outras Superfícies 305
Exercícios 309
Curvas Coordenadas 311
Plano Tangente e Reta Normal 313
Equação da Reta Normal 317
Equação do Plano Tangente 318
Superfícies Suaves e Orientação 322
Exercícios 330
Área de uma Superfície 333
Integral de Superfície de um Campo Escalar 339
Centro de Massa e Momento de Inércia 344
Exercícios 348
Integral de Superfície de um Campo Vetorial 353
Interpretação Física 357
Exercícios 367
Teorema de Stokes 370
Teorema da Divergência 381
Exercícios 387

TABELAS 391

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS 395

Snow666

MAKRON Books

Capítulo 1

FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos do Cálculo para funções vetoriais de uma variável. Serão apresentadas as definições formais de limite, continuidade e derivada. A derivada será interpretada geometricamente como um vetor tangente ao hodógrafo da função. Fisicamente, ela será interpretada como o vetor velocidade de uma partícula em movimento no espaço.

1.1 DEFINIÇÃO

Chamamos de função vetorial de uma variável real t, definida em um intervalo I, a função que a cada $t \in I$ associa um vetor $\vec{f}$ do espaço. Denotamos

$$\vec{f} = \vec{f}(t).$$

O vetor $\vec{f}(t)$ pode ser escrito como

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}.$$

Assim, podemos dizer que a função vetorial $\vec{f}$ determina três funções escalares de t: $f_1 = f_1(t)$, $f_2 = f_2(t)$ e $f_3 = f_3(t)$. Reciprocamente, as três funções escalares f_1, f_2 e f_3 determinam a função vetorial $\vec{f}(t)$.

Observamos que, dado um ponto $P(x,y,z)$ do espaço, o vetor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

é chamado vetor posição do ponto P (ver Figura 1.1).

A cada ponto $P(x,y,z)$ corresponde um único vetor posição e vice-versa. Em vista disso, muitas vezes, um vetor $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ é representado por (v_1, v_2, v_3). Esta notação também é usada para representar as funções vetoriais.

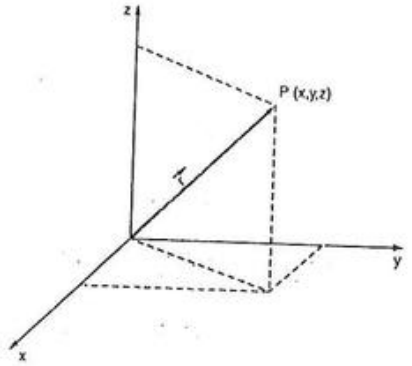


Figura 1.1

1.2 EXEMPLOS

(i) Podemos expressar o movimento de uma partícula P, sobre uma circunferência de raio 1, pela função vetorial $\vec{f}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$. Neste caso, a variável t representa o tempo e $P(f_1(t), f_2(t))$ nos dá a posição da partícula em movimento (ver Figura 1.2).

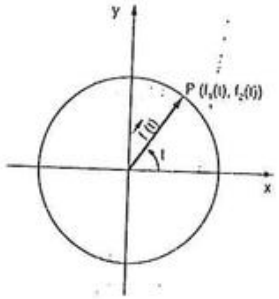


Figura 1.2

(ii) Em Economia podemos estabelecer uma função vetorial preço. Consideremos 3 mercadorias tais que a primeira tem preço t^2, a segunda tem preço $t + 2$ e a terceira tem preço dado pela soma dos preços das duas primeiras. A função vetorial preço é

$$\vec{P}(t) = (t^2,\ t + 2,\ t^2 + t + 2).$$

(iii) Outros exemplos são dados nas expressões:

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + \vec{ij} - (t^2 - 4)\vec{k}$$
$$\vec{g}(t) = t^2\vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$$
$$\vec{h}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j} + 5\vec{k}.$$

1.3 DEFINIÇÃO

O hodógrafo de uma função vetorial $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, $t \in I$, é o lugar geométrico dos pontos P do espaço que têm vetor posição $\vec{f}(t)$, $t \in I$ (ver Figura 1.3).

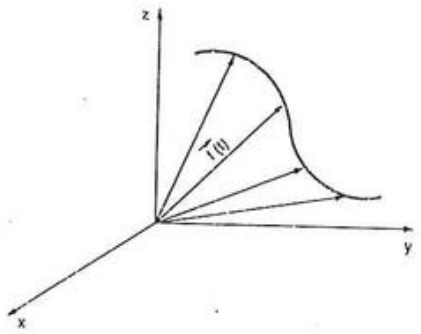


Figura 1.3

Existe uma estreita ligação entre as funções vetoriais de uma variável real e as curvas no espaço. Por exemplo, se $\vec{f}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, o hodógrafo de $\vec{f}(t)$ coincide com a trajetória da partícula.

1.4 EXEMPLOS

(i) Descrever a trajetória L de um ponto móvel P, cujo deslocamento é expresso por

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Solução. Podemos descrever a trajetória L traçando um esboço do gráfico da função vetorial dada, ou seja, construindo o hodógrafo de

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Para isso, fazemos uma tabela e assinalamos os pontos correspondentes (ver Tabela 1.1 e Figura 1.4).

Tabela 1.1

t	-2	-1	0	1	2
$\vec{f}(t)$	$-2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$	$-\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$	$3\vec{k}$	$\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$	$2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

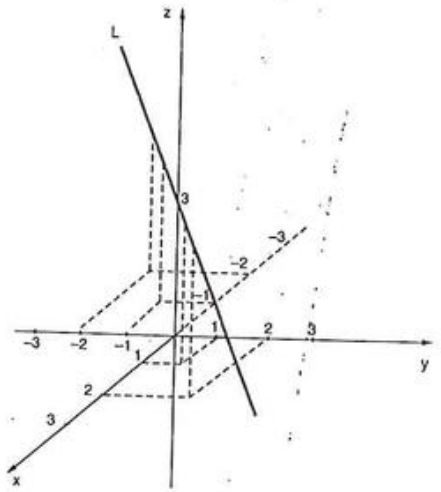


Figura 1.4

(ii) Fazer o hodógrafo das funções exemplificadas em 1.2 (iii).

Seja $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} - (t^2 - 4)\vec{k}$. Neste caso, o hodógrafo pode ser esboçado através da intersecção de superfícies. Basta observarmos que os pontos $P(x(t), y(t), z(t))$ do hodógrafo de $\vec{f}$ têm coordenadas

$$x(t) = t$$

$$y(t) = t$$

$$z(t) = 4 - t^2.$$

Eliminando t, obtemos as superfícies $y = x$ e $z = 4 - x^2$, cuja intersecção nos dá o hodógrafo de $\vec{f}(t)$ (ver Figura 1.5).

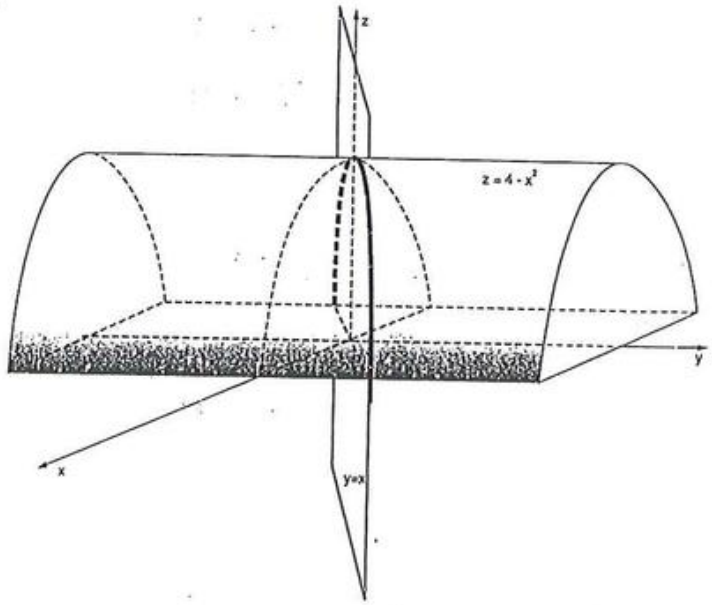


Figura 1.5

Seja $\vec{g}(t) = t^2\vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$. Usando o mesmo raciocínio anterior, temos que o hodógrafo pode ser esboçado pela intersecção de $x = y$, $y \geq 0$ e $z = 3$ (ver Figura 1.6).

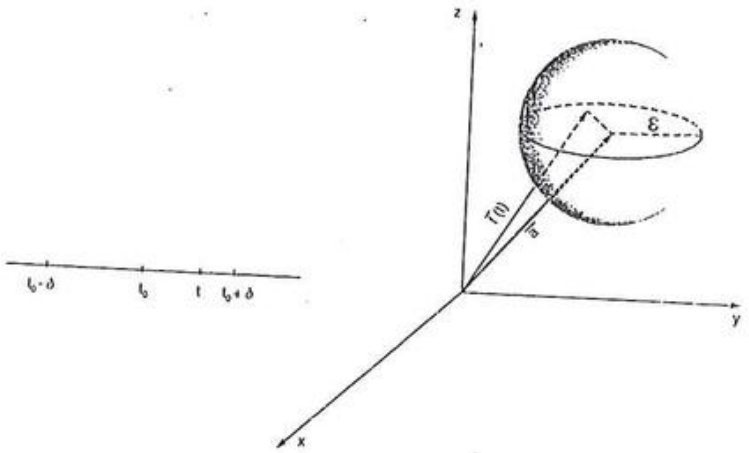


Figura 1.8

1.7.2 Proposição

Seja $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ e $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. O $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ se, e somente se,

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t) = a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Prova. Se $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$, então para um $\varepsilon > 0$ arbitrário, existirá um $\delta > 0$, tal que

$$|\vec{f}(t) - \vec{a}| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Como

$$\vec{f}(t) - \vec{a} = [f_1(t) - a_1]\vec{i} + [f_2(t) - a_2]\vec{j} + [f_3(t) - a_3]\vec{k}, \text{ para } 0 < |t - t_0| < \delta,$$

temos que

$$|f_i(t) - a_i| \le |\vec{f}(t) - \vec{a}| < \varepsilon,$$

para $i = 1, 2, 3$. Portanto, $\lim_{t\to t_0} f_i(t) = a_i$.

Reciprocamente, se $\lim_{t\to t_0} f_i(t) = a_i$, $i = 1, 2, 3$, para todo $\varepsilon > 0$, existirá $\delta > 0$, tal que $|f_i(t) - a_i| < \varepsilon/3$ quando $0 < |t - t_0| < \delta$.

Usando a desigualdade triangular, vem

$$\begin{aligned}|\vec{f}(t) - \vec{a}| &= |[f_1(t) - a_1]\vec{i} + [f_2(t) - a_2]\vec{j} + [f_3(t) - a_3]\vec{k}| \\ &\le |f_1(t) - a_1| + |f_2(t) - a_2| + |f_3(t) - a_3| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$.

1.7.3 Propriedades

Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ duas funções vetoriais e $h(t)$ uma função escalar, definidas em um mesmo intervalo. Se

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}, \quad \lim_{t\to t_0} \vec{g}(t) = \vec{b} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to t_0} h(t) = m,$$

então:

a) $\lim_{t\to t_0} [\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)] = \vec{a} \pm \vec{b}$;

b) $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = \vec{a} \cdot \vec{b}$;

c) $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = \vec{a} \times \vec{b}$;

d) $\lim_{t\to t_0} h(t)\,\vec{f}(t) = m\vec{a}$.

Prova. Estas propriedades podem ser mostradas usando a proposição 1.7.2 e as propriedades de limite das funções escalares. Como exemplo, provaremos o item (d), isto é, $\lim_{t\to t_0} h(t)\,\vec{f}(t) = m\vec{a}$.

Sejam $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ e $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Então, $h(t)\,\vec{f}(t) = h(t)\,f_1(t)\vec{i} + h(t)\,f_2(t)\vec{j} + h(t)\,f_3(t)\vec{k}$ e

$$\lim_{t\to t_0} h(t)\,\vec{f}(t) = \lim_{t\to t_0}[h(t)\,f_1(t)]\vec{i} + \lim_{t\to t_0}[h(t)\,f_2(t)]\vec{j} + \lim_{t\to t_0}[h(t)\,f_3(t)]\vec{k}$$

$$= [\lim_{t\to t_0} h(t) \cdot \lim_{t\to t_0} f_1(t)]\vec{i} + [\lim_{t\to t_0} h(t) \cdot \lim_{t\to t_0} f_2(t)]\vec{j}$$

$$+ [\lim_{t\to t_0} h(t) \cdot \lim_{t\to t_0} f_3(t)]\vec{k}$$

$$= ma_1\vec{i} + ma_2\vec{j} + ma_3\vec{k}$$

$$= m\vec{a}.$$

1.7.4 Exemplos

(i) Calcular $\lim_{t\to\sqrt{2}} \left(t^2\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + 2\vec{k}\right)$.

Usando a proposição 1.7.2, temos

$$\lim_{t\to\sqrt{2}} \left(t^2\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + 2\vec{k}\right) = \left(\lim_{t\to\sqrt{2}} t^2\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to\sqrt{2}} (t^2 - 1)\vec{j}\right) + \left(\lim_{t\to\sqrt{2}} 2\right)\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

(ii) Calcular $\lim_{t\to 0} \vec{f}(t)$, onde $\vec{f}(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{i} + t\vec{j}$.

Temos

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to 0} t\right)\vec{j}$$

$$= \vec{i}.$$

(iii) Seja $\vec{f}(t) = \dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{t - 2}$, onde $\vec{a} = \vec{i}$ e $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$. Calcular:

a) $\lim_{t\to 0} \vec{f}(t)$;

b) $\lim_{t\to 2} (t^2 - 4t + 4)\,\vec{f}(t)$.

Temos que

$$\vec{f}(t) = \frac{\vec{i} + 2(2\vec{j} - \vec{k})}{t - 2}$$

$$= \frac{1}{t-2}\vec{i} + \frac{4}{t-2}\vec{j} - \frac{2}{t-2}\vec{k}.$$

Assim,

a) $$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t-2}\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to 0} \frac{4}{t-2}\right)\vec{j} - \left(\lim_{t\to 0} \frac{2}{t-2}\right)\vec{k}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

b) Para resolver este item, calculamos inicialmente

$$(t^2 - 4t + 4)\,\vec{f}(t) = (t^2 - 4t + 4)\left(\frac{1}{t-2}\vec{i} + \frac{4}{t-2}\vec{j} - \frac{2}{t-2}\vec{k}\right)$$

$$= \frac{t^2 - 4t + 4}{t-2}\vec{i} + \frac{4(t^2 - 4t + 4)}{t-2}\vec{j} - \frac{2(t^2 - 4t + 4)}{t-2}\vec{k}.$$

Temos, então

$$\lim_{t\to 2} (t^2 - 4t + 4)\,\vec{f}(t) = \left[\lim_{t\to 2} \frac{t^2 - 4t + 4}{t-2}\right]\vec{i} + \left[\lim_{t\to 2} \frac{4(t^2 - 4t + 4)}{t-2}\right]\vec{j}$$

$$- \left[\lim_{t\to 2} \frac{2(t^2 - 4t + 4)}{t-2}\right]\vec{k}.$$

Resolvendo os limites das funções escalares pelos métodos já conhecidos, vem

$$\lim_{t\to 2} (t^2 - 4t + 4)\,\vec{f}(t) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}.$$

Observamos que a propriedade 1.7.3 (d) não foi usada porque $\lim_{t\to 2} \vec{f}(t)$ não existe.

(iv) Sejam $\vec{f}(t) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$ e

$$\vec{g}(t) = 3t\vec{i} - 2\vec{j} + 4t^2\vec{k}.$$

Calcular: a) $\lim_{t\to 1} [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)]$;

b) $\lim_{t\to 1} [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)]$;

c) $\lim_{t\to 1} [\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)]$.

Usando 1.7.2 e 1.7.3, temos

a) $$\lim_{t\to 1} [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)] = \lim_{t\to 1} \vec{f}(t) + \lim_{t\to 1} \vec{g}(t)$$

$$= \lim_{t\to 1} \left(t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}\right) + \lim_{t\to 1} \left(3t\vec{i} - 2\vec{j} + 4t^2\vec{k}\right)$$

$$= \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) + \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}\right)$$

$$= 4\vec{i} + 7\vec{k}.$$

b) $$\lim_{t\to 1} [f(t) \cdot \vec{g}(t)] = \lim_{t\to 1} \vec{f}(t) \cdot \lim_{t\to 1} \vec{g}(t)$$

$$= \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}\right)$$

$$= 1.3 + 2.(-2) + 3.4$$

$$= 11.$$

c) $$\lim_{t\to 1} [\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)] = \lim_{t\to 1} \vec{f}(t) \times \lim_{t\to 1} \vec{g}(t)$$

$$= \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \times \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}\right)$$

$$= 14\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}.$$

1.7.5 Definição

Uma função vetorial $\vec{f} = \vec{f}(t)$, definida em um intervalo I, é contínua em $t_0 \in I$, se

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0).$$

Da proposição 1.7.2 segue que $\vec{f}(t)$ é contínua em t_0 se, e somente se, suas componentes são funções contínuas em t_0.

1.7.6 Exemplos

(i) Verificar se a função

$\vec{f}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$ é contínua em $t_0 = \pi$.

Sabemos que $\vec{f}(t)$ é definida para $t_0 = \pi$.

Ainda,

$$\lim_{t\to\pi} \vec{f}(t) = \lim_{t\to\pi} \left(\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$= -\vec{j} + \vec{k}$$

$$= \vec{f}(\pi).$$

Portanto, $\vec{f}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$ é contínua em $t_0 = \pi$.

(ii) Verificar se a função

$$\vec{g}(t) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}t}{t}\vec{i} + \vec{j}, & t \neq 0 \\ 2\vec{i} + \vec{j}, & t = 0 \end{cases}$$

é contínua em $t_0 = 0$.

Essa função não é contínua em $t_0 = 0$, pois $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{\text{sen}t}{t}\vec{i} + \vec{j}\right) = \vec{i} + \vec{j}$ é diferente de $\vec{g}(0) = 2\vec{i} + \vec{j}$.

(iii) Indicar os intervalos de continuidade das seguintes funções:

a) $\vec{g}(t) = \dfrac{1}{t}\vec{i} + t^2\vec{j}$;

b) $\vec{h}(t) = \ln t\,\vec{j} + 2\vec{k}$.

Temos:

a) $\vec{g}(t)$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$, pois $g_1(t) = \dfrac{1}{t}$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $g_2(t) = t^2$ é contínua em $\mathbb{R}$.

b) Como $h_1(t) = \ln t$ é contínua em $(0, \infty)$ e $h_2(t) = 2$ é contínua em $\mathbb{R}$, segue que $\vec{h}(t)$ é contínua em $(0, \infty)$.

1.8 EXERCÍCIOS

1. A posição de uma partícula no plano xy, no tempo t, é dada por $x(t) = e^t$, $y(t) = te^t$.
   a) Escrever a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento desta partícula.
   b) Onde se encontrará a partícula em $t = 0$ e em $t = 2$?

2. O movimento de um besouro que desliza sobre a superfície de uma lagoa pode ser expresso pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = \frac{1 - \cos t}{m}\vec{i} + \left(2t + \frac{t - \text{sen}t}{m}\right)\vec{j},$$

onde m é a massa do besouro. Determinar a posição do besouro no instante $t = 0$ e $t = \pi$.

3. Esboçar o hodógrafo das seguintes funções vetoriais:
   a) $\vec{f}(t) = (4 - 4t)\vec{i} + (4 - 4t)\vec{j}$, $t \in [0, 2]$
   b) $\vec{g}(t) = 6\text{sen}t\,\vec{i} + 4\vec{j} + 25\cos t\,\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$
   c) $\vec{h}(t) = 2\vec{i} + t^3\vec{j}$
   d) $\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + t\vec{k}$
   e) $\vec{w}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j}$
   f) $\vec{v}(t) = 4\vec{i} + t\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$.

4. Esboçar a trajetória de uma partícula P, sabendo que seu movimento é descrito por:
   a) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + (2t^2 - 1)\vec{j}$
   b) $\vec{g}(t) = \dfrac{2}{t}\vec{i} + \dfrac{2}{t+1}\vec{j}$, $t > 0$
   c) $\vec{h}(t) = t\vec{i} + \vec{j} + 4t^2\vec{k}$
   d) $\vec{v}(t) = \ln t\,\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $t > 0$
   e) $\vec{w}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\text{sen}t\,\vec{j} + (9 - 3\text{sen}t)\vec{k}$; $t \in [0, 2\pi]$
   f) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (9 - t)\vec{j} + t^2\vec{k}$, $t > 0$
   g) $\vec{\ell}(t) = t\vec{i} + \text{sen}t\,\vec{j} + 2\vec{k}$
   h) $\vec{r}(t) = (8 - 4\text{sen}t)\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 4\text{sen}t\,\vec{k}$.

5. Seja $\vec{f}(t) = \vec{a}t + \vec{b}t^2$ e $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \text{sen}t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$, com $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $0 \le t \le 2\pi$.

   Calcular:

   a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$
   b) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$
   c) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$

d) $\vec{a} \cdot \vec{f}(t) + \vec{b} \cdot \vec{g}(t)$

e) $\vec{f}(t-1) + \vec{g}(t+1)$.

6. Dadas $\vec{f}(t) = t\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{g}(t) = \vec{i} + t\vec{j}$, esboçar o hodógrafo de $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$.

7. Uma partícula se desloca no espaço. Em cada instante t o seu vetor posição é dado por

$$\vec{r}(t) + t\vec{i} + \frac{1}{t-2}\vec{j} + \vec{k}.$$

a) Determinar a posição da partícula no instante $t = 0$ e $t = 1$.

b) Esboçar a trajetória da partícula.

c) Quando t se aproxima de 2, o que ocorre com a posição da partícula?

8. Seja $\vec{f}(t) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$ e

$$\vec{g}(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k}, t \geq 0.$$

Calcular:

a) $\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\right]$

b) $\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t) - \vec{g}(t)\right]$

c) $\lim_{t\to 1}\left[3\vec{f}(t) - \frac{1}{2}\vec{g}(t)\right]$

d) $\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)\right]$

e) $\lim_{t\to 1}\left[\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right]$

f) $\lim_{t\to 1}\left[(t+1)\vec{f}(t)\right]$

g) $\lim_{t\to 0}\left[\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right]$

9. Seja $\vec{f}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 2\vec{k}$ e $h(t) = 1/t$. Calcular, se existir, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{t\to 0} \vec{f}(t)$

b) $\lim_{t\to 0}\left[h(t) \cdot \vec{f}(t)\right]$.

10. Calcular os seguintes limites de funções vetoriais de uma variável.

a) $\lim_{t\to\pi}\left(\cos t\,\vec{i} + t^2\vec{j} - 5\vec{k}\right)$

b) $\lim_{t\to -2}\left(\frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t+2)(t-3)}\vec{i} + \vec{j}\right)$

c) $\lim_{t\to 2}\frac{1}{t-2}\left[(t^2-4)\vec{i} + (t-2)\vec{j}\right]$

d) $\lim_{t\to 1}\left[\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}\vec{i} + (t-1)\vec{j} + (t+1)\vec{k}\right]$

e) $\lim_{t\to 0}\left[\frac{2^t - 1}{t}\vec{i} + (2^t - 1)\vec{j} + t\vec{k}\right]$.

11. Mostrar que o limite do módulo de uma função vetorial é igual ao módulo do seu limite, se este último existir.

12. Mostrar que a função vetorial $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ é contínua em um intervalo I se, e somente se, as funções escalares $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são contínuas em I.

13. Calcular o limite e analisar a continuidade das funções vetoriais dadas, nos pontos indicados.

a) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \frac{|t-3|}{t-3}\vec{i} + t^2\vec{j}, & t \neq 3 \\ \vec{0}, & t = 3 \end{cases}$

em $t = 0$ e $t = 3$.

b) $\vec{f}(t) = \begin{cases} t\,\text{sen}\,\frac{1}{t}\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}, & t \neq 0 \\ \vec{j}, & t = 0 \end{cases}$; $t = 0$

c) $\vec{f}(t) = \begin{cases} t\vec{i} + \dfrac{\sqrt{t+2} - \sqrt{2}}{t}\,\vec{j}, & t \neq 0 \\ \sqrt{2}\,\vec{j}, & t = 0 \end{cases}$; $t = 0$

d) $\vec{f}(t) = \text{sen}\,t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$; $t = 0$

e) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t-1}\,\vec{i} + \dfrac{4}{t-2}\,\vec{j} - 5\vec{k}, & t \neq 1 \text{ e } t \neq 2 \\ \vec{0}, & t = 1 \text{ e } t = 2 \end{cases}$

em $t = 1$ e $t = 2$.

14. Indicar os intervalos de continuidade das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \vec{a}\,\text{sen}\,t + \vec{b}\cos t$ em $[0, 2\pi]$

onde $\vec{a} = \vec{i}$ e $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{g}(t) = \frac{1}{t}\,\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + e^t\vec{k}$

c) $\vec{h}(t) = e^{-t}\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}$

d) $\vec{v}(t) = \left(\ln(t+1), \frac{1}{t}, t\right)$

e) $\vec{w}(t) = (\text{sen}\,t, \text{tg}\,t, e^t)$

f) $\vec{r}(t) = \left(e^t, \frac{t^2 - 1}{t - 1}, \ln(t+1)\right)$

g) $\vec{f}(t) = \left(\sqrt[3]{t}, \frac{-1}{t^2 - 1}, \frac{1}{t^2 - 4}\right)$

h) $\vec{g}(t) = \left(t^2 + 1, \frac{2 - t^2}{t^2 - 2t + 1}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

15. Provar os itens (a), (b) e (c) das propriedades 1.7.3.

16. Sejam $\vec{f}$ e $\vec{g}$ funções vetoriais contínuas em um intervalo I. Mostrar que:

a) $\vec{f} + \vec{g}$ é contínua em I;

b) $\vec{f} \times \vec{g}$ é contínua em I.

1.9 DERIVADA

1.9.1 Definição

Seja $\vec{f}(t)$ uma função vetorial. Sua derivada é a função vetorial $\vec{f}'(t)$, definida por

$\vec{f}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}$, para todo t, tal que o limite existe. Se a derivada $\vec{f}'(t)$ existe em todos os pontos de um intervalo I, dizemos que $\vec{f}$ é derivável em I.

Se $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$,

temos

$$\frac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = \frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}\,\vec{j} + \frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t}\,\vec{k}.$$

Portanto, pela Proposição 1.7.2, segue que $\vec{f}$ é derivável em um ponto t se, e somente se, as três funções escalares $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são deriváveis em t. Neste caso, temos

$$\vec{f}'(t) = f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}.$$

1.9.2 Exemplos

(i) Se $\vec{f}(t) = t^2\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + (5t - 1)\vec{k}$, temos

$\vec{f}'(t) = 2t\vec{i} - \text{sen}\,t\,\vec{j} + 5\vec{k}$.

(ii) Se $\vec{g}(t) = (2t - 3)^3\vec{i} + e^{-5t}\vec{j}$, temos que

$\vec{g}'(t) = 6(2t - 3)^2\vec{i} - 5e^{-5t}\vec{j}$.

1.9.3 Interpretação geométrica da derivada

Seja $\vec{f}(t)$ uma função vetorial derivável em um intervalo I. Quanto t percorre I, a extremidade livre do vetor $\vec{f}(t)$ descreve uma curva C no espaço.

Para cada $t \in I$, $\vec{f}(t)$ é o vetor posição do correspondente ponto sobre a curva (ver Figura 1.9).

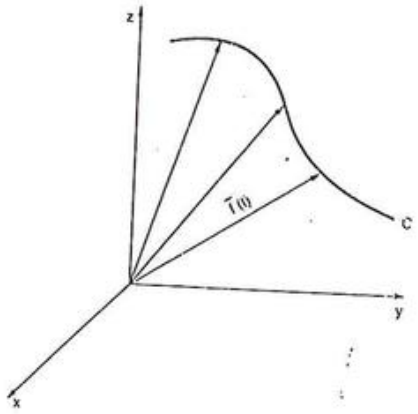


Figura 1.9

Sejam P e Q os pontos de C, correspondentes aos vetores posição $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}(t + \Delta t)$, respectivamente. A reta que passa por P e Q é secante à curva C e o vetor $\Delta\vec{f} = \vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)$ coincide com o segmento $\overline{PQ}$ (ver Figura 1.10). Como Δt é escalar, $\dfrac{\Delta\vec{f}}{\Delta t}$ tem a mesma direção do segmento $\overline{PQ}$.

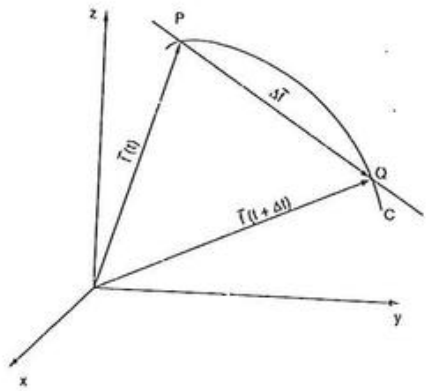


Figura 1.10

Quando $\Delta t \to 0$ ($Q \to P$), a reta secante se aproxima da reta tangente à curva C em P (ver Figura 1.11).

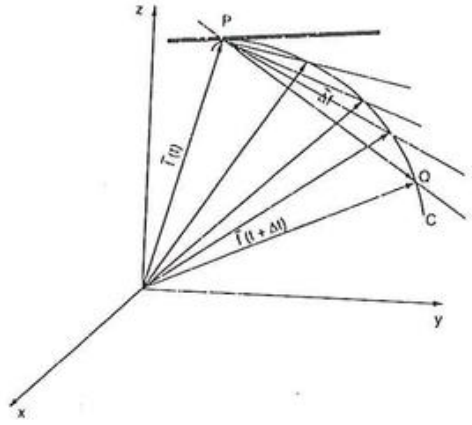


Figura 1.11

Assim, se $\vec{f}'(t) \neq 0$, $\vec{f}'(t)$ é um vetor tangente à curva C. Seu sentido é o do movimento da extremidade livre do vetor $\vec{f}(t)$ ao crescer t.

1.9.4 Exemplos

(i) Dada $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, determinar $\vec{f}'(t)$. Esboçar o hodógrafo de $\vec{f}$ e os vetores $\vec{f}'(1)$, $\vec{f}'(-1)$ e $\vec{f}'(0)$.

Solução. Temos, $\vec{f}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$.

A Figura 1.12 mostra o hodógrafo de f, onde desenhamos os vetores

$$\vec{f}'(1) = \vec{i} + 2\vec{j},\ \vec{f}'(-1) = \vec{i} - 2\vec{j} \text{ e } \vec{f}'(0) = \vec{i}.$$

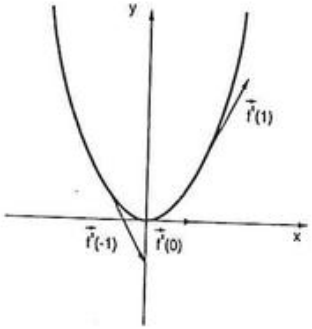


Figura 1.12

(ii) Determinar um vetor tangente ao hodógrafo de $\vec{g}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + \vec{k}$, $t \in [0,\ 2\pi]$, no ponto $P(0, 1, 1)$.

Solução. Temos,

$$\vec{g}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}.$$

Necessitamos do valor de $\vec{g}'(t)$ no ponto P. Para isso, precisamos determinar o correspondente valor de t. Como o vetor posição de P é $\vec{j} + \vec{k}$, t deve satisfazer

$$\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + \vec{k} = \vec{j} + \vec{k}.$$

Portanto, $\cos t = 0$ e $\operatorname{sen} t = 1$ e dessa forma $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Um vetor tangente ao hodógrafo de $\vec{g}(t)$ em $P(0, 1, 1)$ é $\vec{g}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\vec{i}$. A Figura 1.13 ilustra este exemplo.

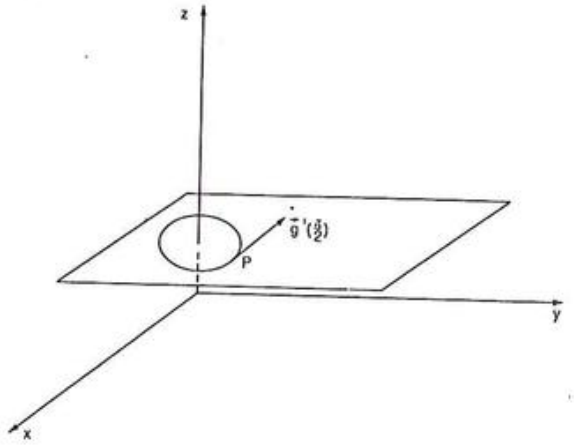


Figura 1.13

1.9.5 Interpretação Física da derivada

Consideremos uma partícula em movimento no espaço. Suponhamos que no tempo t, $\vec{r}(t)$ é o vetor posição da partícula com relação a um sistema de coordenadas cartesianas. Ao variar t, a extremidade livre do vetor $\vec{r}(t)$ descreve a trajetória C da partícula.

Suponhamos que a partícula esteja em P no tempo t e em Q no tempo $t + \Delta t$. Então $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ representa o deslocamento da partícula de P para Q, ocorrido no intervalo de tempo Δt (ver Figura 1.14).

A taxa média de variação de $\vec{r}(t)$ no intervalo Δt é dada por

$$\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

e é chamada velocidade média da partícula no intervalo de tempo Δt. A velocidade instantânea da partícula no tempo t, que denotamos $\vec{v}(t)$, é definida pelo limite

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

quando este limite existe.

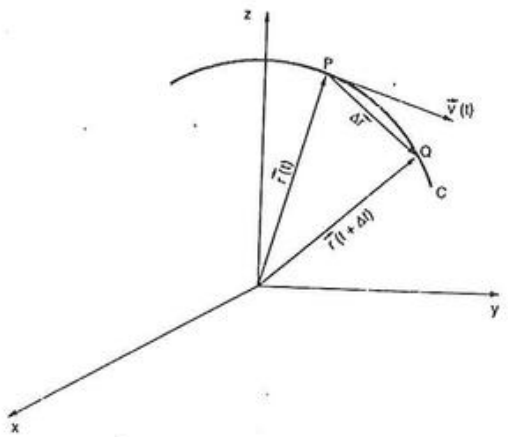


Figura 1.14

Portanto, quando $\vec{r}(t)$ é derivável, a velocidade instantânea da partícula é dada por

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t).$$

Analogamente, se $\vec{v}(t)$ é derivável, a acelaração da partícula é dada por

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t).$$

1.9.6 Exemplos

(i) O vetor posição de uma partícula em movimento no plano é

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t+1}\vec{j},\ t \geq 0.$$

a) Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração em um instante qualquer t.

b) Esboçar a trajetória da partícula, desenhando os vetores velocidade no tempo $t = 0$ e $t = 1$.

Solução de (a). Em um instante qualquer t, o vetor velocidade é dado por:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

$$= \vec{i} + \frac{-1}{(1+t)^2}\vec{j}.$$

O vetor aceleração é o vetor

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t)$$

$$= \frac{2}{(1+t)^3}\vec{j}.$$

Solução de (b). No instante $t = 0$, os vetores velocidade e aceleração, respectivamente, são dados por:

$$\vec{v}(0) = \vec{i} - \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{a}(0) = 2\vec{j}.$$

Para $t = 1$, temos

$$\vec{v}(1) = \vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{a}(1) = \frac{1}{4}\vec{j}.$$

A Figura 1.15 mostra a trajetória da partícula. Os vetores $\vec{v}(0)$ e $\vec{a}(0)$ estão desenhados com origem no ponto $P(0, 1)$ porque no instante $t = 0$ o vetor posição da partícula é $\vec{r}(0) = \vec{j}$. Como $\vec{r}(1) = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, os vetores $\vec{v}(1)$ e $\vec{a}(1)$ tem sua origem no ponto $Q(1, 1/2)$.

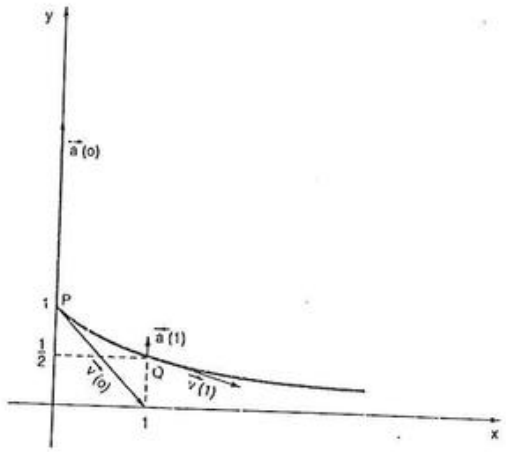


Figura 1.15

(ii) Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração de uma partícula que se move segundo a lei

$$\vec{r}(t) = \cos 2t\,\vec{i} + \operatorname{sen} 2t\,\vec{j} + \vec{k}.$$

Mostrar que o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição e que o vetor aceleração é perpendicular ao vetor velocidade.

Solução. Temos,

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

$$= -2\operatorname{sen} 2t\,\vec{i} + 2\cos 2t\,\vec{j}$$

e

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t)$$

$$= -4\cos 2t\,\vec{i} - 4\operatorname{sen} 2t\,\vec{j}.$$

Sabemos que dois vetores são perpendiculares se o seu produto escalar é nulo. Temos,

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = \left(\cos 2t\,\vec{i} + \operatorname{sen} 2t\,\vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \left(-2\operatorname{sen} 2t\,\vec{i} + 2\cos 2t\,\vec{j} + 0\vec{k}\right)$$

$$= -2\operatorname{sen} 2t \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \cos 2t + 0$$

$$= 0$$

e

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = \left(-2\operatorname{sen} 2t\,\vec{i} + 2\cos 2t\,\vec{j}\right) \cdot \left(-4\cos 2t\,\vec{i} - 4\operatorname{sen} 2t\,\vec{j}\right)$$

$$= 8\operatorname{sen} 2t \cos 2t - 8\operatorname{sen} 2t \cos 2t$$

$$= 0.$$

Portanto, o vetor $\vec{r}(t)$ é perpendicular ao vetor $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t)$ é perpendicular a $\vec{a}(t)$. (Ver Figura 1.16.)

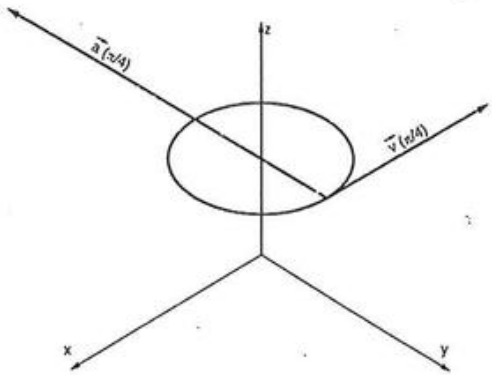


Figura 1.16

As REGRAS DE DERIVAÇÃO de funções vetoriais são similares às de funções escalares. Temos a seguinte proposição:

1.9.7 Proposição

Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vetoriais e $h(t)$ uma função escalar, deriváveis em um intervalo I. Então para todo $t \in I$, temos:

a) $\left(\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\right)' = \vec{f}\,'(t) + \vec{g}\,'(t)$

b) $\left(h(t)\vec{f}(t)\right)' = h(t)\vec{f}\,'(t) + h'(t)\vec{f}(t)$

c) $\left(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)\right)' = \vec{f}\,'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}\,'(t)$

d) $\left(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right)' = \vec{f}\,'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}\,'(t)$.

Prova do item (c). Sejam

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} \text{ e}$$

$$\vec{g}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}. \text{ Então,}$$

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = f_1(t)\,g_1(t) + f_2(t)\,g_2(t) + f_3(t)\,g_3(t).$$

Como $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ são deriváveis no intervalo I, o mesmo ocorre com as funções f_1, f_2, f_3, g_1, g_2 e g_3. Usando as regras da derivação da soma e do produto de funções escalares, vem:

$$\begin{aligned}(\vec{f}(t)\,.\,\vec{g}(t))' &= [f_1(t)\,g_1(t) + f_2(t)\,g_2(t) + f_3(t)\,g_3(t)]' \\ &= (f_1(t)\,g_1(t))' + (f_2(t)\,g_2(t))' + (f_3(t)\,g_3(t))' \\ &= f_1'(t)\,g_1(t) + f_1(t)\,g_1'(t) + f_2'(t)\,g_2(t) + \\ &\quad + f_2(t)\,g_2'(t) + f_3'(t)\,g_3(t) + f_3(t)\,g_3'(t). \\ &= [f_1'(t)\,g_1(t) + f_2'(t)\,g_2(t) + f_3'(t)\,g_3(t)] + \\ &\quad + [f_1(t)\,g_1'(t) + f_2(t)\,g_2'(t) + f_3(t)\,g_3'(t)] \\ &= \vec{f}'(t)\,.\,\vec{g}(t) + \vec{f}(t)\,.\,\vec{g}'(t).\end{aligned}$$

1.9.8 Derivadas sucessivas

Seja $\vec{f}(t)$ uma função vetorial derivável em um intervalo I. Sua derivada $\vec{f}'(t)$ é uma função vetorial definida em I. Se $\vec{f}'(t)$ é derivável em um ponto $t \in I$, a sua derivada é chamada derivada segunda de $\vec{f}$ no ponto t e é representada por $\vec{f}''(t)$.

Analogamente, são definidas as derivadas de ordem mais alta.

1.9.9 Exemplos

(i) Sejam $h(t) = t$ e $\vec{f}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$.

a) Determinar $\left(h(t)\,\vec{f}(t)\right)'$.

b) Mostrar que $\vec{f}'(t)$ é ortogonal a $\vec{f}(t)$.

Solução de (a). Pela Proposição 1.9.7, temos que

$$\begin{aligned}\left(h(t)\,\vec{f}(t)\right)' &= \left[t\left(\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}\right)\right]' \\ &= t\left(\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}\right)' + (t)'\left(\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}\right) \\ &= t\left(-\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right) + \left(\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}\right) \\ &= (\cos t - t\operatorname{sen} t)\,\vec{i} + (\operatorname{sen} t + t\cos t)\,\vec{j}.\end{aligned}$$

Solução de (b). Para que $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}'(t)$ sejam ortogonais, devemos ter

$$\vec{f}(t)\,.\,\vec{f}'(t) = 0.$$

Temos,

$$\begin{aligned}\vec{f}(t)\,.\,\vec{f}'(t) &= \left(\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}\right)\,.\,\left(-\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}\right) \\ &= -\cos t\,\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\,\cos t \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) Mostrar que $f'(t)$ é ortogonal a $\vec{f}(t)$ sempre que $\left|\vec{f}(t)\right|$ é uma constante.

Como $\left|\vec{f}(t)\right| = k$, k constante, e $\left|\vec{f}(t)\right| = \sqrt{\vec{f}(t)\,.\,\vec{f}(t)}$, temos que $\vec{f}(t)\,.\,\vec{f}(t) = k^2$, para todo t.

Derivando, vem

$$\begin{aligned}\left[\vec{f}(t)\,.\,\vec{f}(t)\right]' &= 0 \\ \vec{f}(t)\,.\,\vec{f}'(t) + \vec{f}'(t)\,.\,\vec{f}(t) &= 0 \\ 2\vec{f}(t)\,.\,\vec{f}'(t) &= 0 \\ \vec{f}(t)\,.\,\vec{f}'(t) &= 0\end{aligned}$$

Logo, os vetores $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}'(t)$ são ortogonais.

1.10 EXERCÍCIOS

1. Determinar a derivada das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \operatorname{tg} t\,\vec{j} + \operatorname{sen}^2 t\,\vec{k}$

b) $\vec{g}(t) = \operatorname{sen} t \cos t\,\vec{i} + e^{-2t}\,\vec{j}$

c) $\vec{h}(t) = (2 - t)\vec{i} + t^3\vec{j} - \dfrac{1}{t}\,\vec{k}$

d) $\vec{f}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + e^{-2t}\,\vec{j} + \vec{k}$

BIBLIOTECA
UNED-PONTA GROSSA
CEFET-PR

e) $\vec{g}(t) = \ln t\,\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$

f) $\vec{h}(t) = \dfrac{5t-2}{2t+1}\vec{i} + \ln(1-t^2)\vec{j} + 5\vec{k}$.

2. Determinar um vetor tangente ao hodógrafo das seguintes funções, nos pontos indicados.

a) $\vec{f}(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$, $P(-1,\ 1,\ -1)$

b) $\vec{g}(t) = (t,\ e^t)$, $P(1,\ e)$

c) $\vec{h}(t) = (\text{sen}\ t,\ \cos t,\ t)$, $P(1,\ 0,\ \pi\ 2)$

d) $\vec{p}(t) = \left(1-t,\ \dfrac{1}{1-t}\right)$, $P(-1,\ -1)$

e) $\vec{r}(t) = (2t,\ \ln t,\ 2)$, $P(2,\ 0,\ 2)$.

3. Mostrar que o hodógrafo de $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{1}{2}\,\text{sen}t,\ \dfrac{1}{2}\cos t,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ está sobre a esfera unitária com centro na origem. Determinar um vetor tangente a essa curva no ponto $P\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Determinar dois vetores unitários, tangentes ao hodógrafo da função dada no ponto indicado.

a) $\vec{f}(t) = (e^t,\ e^{-t},\ t^2+1)$; $P(1,\ 1,\ 1)$

b) $\vec{g}(t) = (4 + 2\cos t,\ 2 + 2\,\text{sen}t,\ 1)$; $P(4,\ 4,\ 1)$

c) $\vec{h}(t) = \left(\dfrac{1}{2}t,\ \sqrt{t+1},\ t+1\right)$; $P(1,\ \sqrt{3},\ 3)$

d) $\vec{r}(t) = (t\cos t,\ t\,\text{sen}t,\ t)$; $P(0,\ \pi/2,\ \pi/2)$

5. Determinar os vetores velocidade e aceleração para qualquer instante t. Determinar, ainda, o módulo desses vetores no instante dado.

a) $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 5\,\text{sen}t\,\vec{j} + 3\vec{k}$; $t = \pi/4$

b) $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-2t}\vec{j}$; $t = \ln 2$

c) $\vec{r}(t) = \cosh t\,\vec{i} + 3\,\text{senh}t\,\vec{j}$; $t = 0$.

6. A posição de uma partícula em movimento no plano, no tempo t, é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2}(t-1)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1).$$

a) Escrever a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento desta partícula.

b) Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração.

c) Esboçar a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração no instante $t = 5$.

7. No instante t, a posição de uma partícula no espaço é dada por $x(t) = t^2$, $y(t) = 2\sqrt{t}$, $z(t) = 4\sqrt{t^3}$.

a) Escrever a função vetorial que nos dá a trajetória da partícula.

b) Determinar um vetor tangente à trajetória da partícula no ponto $P(1, 2, 4)$.

c) Determinar a posição, velocidade e a aceleração da partícula para $t = 4$.

8. Uma partícula se move no espaço com vetor posição $\vec{r}(t)$. Determinar a velocidade e a aceleração da partícula em um instante t qualquer. Esboçar a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração para os valores indicados de t.

a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 4\vec{j} + (4 - t^2)\vec{k}$; $t = 0;\ 2$

b) $\vec{r}(t) = \dfrac{1}{1+t}\vec{i} + t\vec{j}$; $t = 1;\ 2$

c) $\vec{r}(t) = t^2\vec{j} + t^6\vec{k}$; $t = 0;\ 1$

d) $\vec{r}(t) = (1-t)\vec{i} + (1+t)\vec{j}$; $t = 1;\ 2$.

9. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores constantes. Determinar o vetor velocidade da partícula cujo movimento é descrito por:

   a) $\vec{r}_1(t) = \vec{a} + t\vec{b}$

   b) $\vec{r}_2(t) = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$.

10. Se $\vec{r}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, mostrar que o vetor velocidade da partícula é perpendicular a $\vec{r}(t)$.

    a) $\vec{r}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$

    b) $\vec{r}(t) = (\cos 3t,\ \operatorname{sen} 3t)$.

11. Em cada um dos itens do exercício anterior, mostrar que o vetor aceleração tem o sentido oposto ao do vetor posição.

12. Mostrar que, quando uma partícula se move com velocidade constante, os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

13. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores constantes não nulos. Seja $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{a} + e^{-2t}\vec{b}$. Mostrar que $\vec{r}''(t)$ tem o mesmo sentido que $\vec{r}(t)$.

14. Seja $\vec{r}(t) = 2\cos wt\,\vec{i} + 4\operatorname{sen} wt\,\vec{j}$, onde w é uma constante não nula. Mostrar que $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}$.

15. Dados $\vec{f}(t) = t\vec{j} + t^2\vec{k}$

    e

    $\vec{g}(t) = t^2\vec{j} - t\vec{k}$,

    determinar:

    a) $\left(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right)'$

    b) $\left(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)\right)'$

    c) $\left(\vec{f}(t) \times \vec{f}(t)\right)'$

    d) $\left(\vec{g}(t) \cdot \vec{g}(t)\right)'$.

16. Se $f(t) = \dfrac{1}{t-1}$ e $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, determinar $\left(f(t)\,\vec{f}(t)\right)'$.

17. Sejam $f(t)$ uma função escalar 2 vezes derivável e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores constantes. Mostrar que se $\vec{g}(t) = \vec{a} + \vec{b}\,f(t)$, então $\vec{g}'(t) \times \vec{g}''(t) = \vec{0}$.

18. Se $\vec{f}$ é uma função vetorial derivável e $h(t) = \left|\vec{f}(t)\right|$, mostrar que $\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = h(t)\,h'(t)$.

Snow666

Snow666

Capítulo 2

CURVAS

Neste capítulo, faremos um estudo sobre curvas, representando-as por meio de equações paramétricas ou de uma equação vetorial. Serão introduzidos vários conceitos necessários no estudo das integrais curvilíneas que será feito no capítulo V.

2.1 REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA

Sejam

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \tag{1}$$

funções contínuas de uma variável t, definidas para $t \in [a, b]$. Chamamos CURVA o conjunto de todos os pontos (x, y, z) determinados por estas equações.

As equações (1) são chamadas equações paramétricas da curva e t é chamado parâmetro.

Podemos obter uma equação vetorial de uma curva. Basta considerar o vetor posição $\vec{r}(t)$ de cada ponto da curva. As componentes de $\vec{r}(t)$ são precisamente as coordenadas do ponto (ver Figura 2.1).

Escrevemos,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \qquad a \leq t \leq b. \tag{2}$$

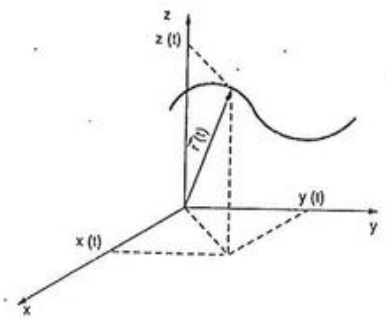


Figura 2.1

Observamos que se as funções $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções constantes, a curva degenera-se em um ponto.

2.2 EXEMPLOS

(i) A equação vetorial $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$ representa uma reta, cujas equações paramétricas são

$$x(t) = t$$
$$y(t) = t$$
$$z(t) = t.$$

(ii) As equações paramétricas

$$x = 2\cos t$$
$$y = 2\operatorname{sen} t$$
$$z = 3t$$

representam uma curva no espaço, chamada hélice circular. A equação vetorial correspondente é

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}.$$

(iii) A equação vetorial

$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$ representa uma parábola no plano $z = 3$.

2.3 DEFINIÇÃO

Uma curva plana é uma curva que está contida em um plano no espaço. Uma curva que não é plana chamada-se curva reversa.

As curvas dos exemplos 2.2 (i) e (iii) são planas e a curva do Exemplo 2.2 (ii) é reversa.

2.4 REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE ALGUMAS CURVAS

A seguir daremos a parametrização de algumas curvas consideradas importantes tendo em vista a sua utilização em muitos exemplos práticos.

2.4.1 Parametrização de uma reta

A equação vetorial de uma reta qualquer pode ser dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}, \tag{3}$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores constantes e t é um parâmetro real.

Na Figura 2.2 podemos visualizar os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A reta passa pelo ponto A, que tem vetor posição $\vec{a}$ e tem a direção do vetor $\vec{b}$.

Considerando as coordenadas de A (a_1, a_2, a_3) que coincidem com as componentes do vetor $\vec{a}$ e considerando também as componentes do vetor $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, reescrevemos (3) como

$$\vec{r}(t) = (a_1 + tb_1)\vec{i} + (a_2 + tb_2)\vec{j} + (a_3 + tb_3)\vec{k}. \tag{4}$$

De (4), podemos dizer que as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (a_1, a_2, a_3) e tem direção $b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, são

$$x(t) = a_1 + tb_1$$
$$y(t) = a_2 + tb_2 \tag{5}$$
$$z(t) = a_3 + tb_3$$

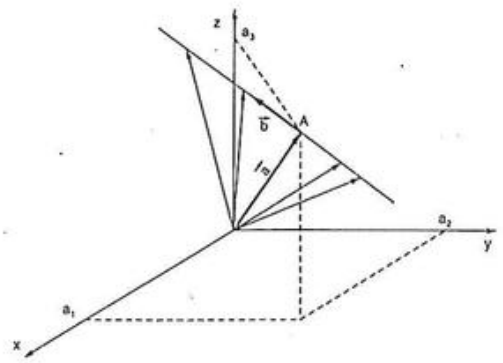


Figura 2.2

2.4.2 Exemplos

(i) Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelo ponto $A(2, 1, -1)$ na direção do vetor $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Usando (4), escrevemos

$$\vec{r}(t) = (2 + t.2)\vec{i} + (1 + t(-3))\vec{j} + (-1 + t.1)\vec{k}$$

$$= (2 + 2t)\vec{i} + (1 - 3t)\vec{j} + (-1 + t)\vec{k}.$$

A Figura 2.3 nos mostra a representação gráfica desta reta.

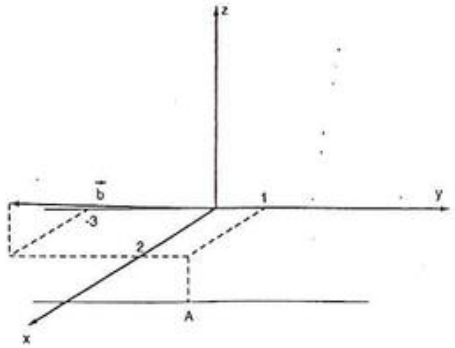


Figura 2.3

(ii) Determinar uma representação paramétrica da reta que passa por $A(2, 0, 1)$ e $B(-1, 1/2, 0)$.

Usando (3), podemos escrever

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}, \text{ onde } \vec{a} = (2, 0, 1) \text{ e}$$

$$\vec{b} = (-1, 1/2, 0) - (2, 0, 1)$$

$$= (-3, 1/2, -1).$$

Logo,

$$\vec{r}(t) = \left(2\vec{i} + \vec{k}\right) + t\left(-3\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}\right)$$

$$= (2 - 3t)\vec{i} + \frac{1}{2}t\vec{j} + (1 - t)\vec{k}.$$

A Figura 2.4 ilustra este exemplo.

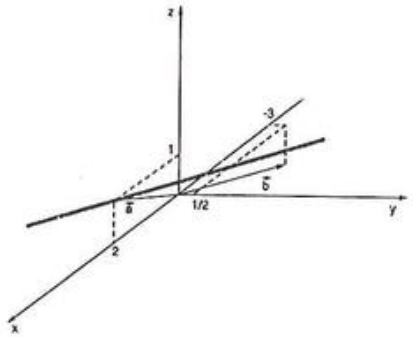


Figura 2.4

2.4.3 Parametrização de uma circunferência

Uma equação vetorial da circunferência de raio a, com centro na origem, no plano xy, é

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\operatorname{sen} t\,\vec{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi. \tag{6}$$

Na Figura 2.5, visualizamos o parâmetro t, $0 \le t \le 2\pi$, que representa o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o vetor posição de cada ponto da curva.

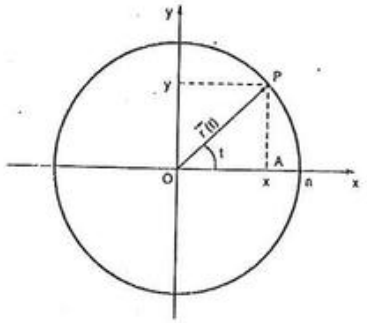


Figura 2.5

Do triângulo OAP na Figura 2.5, obtemos

$$x(t) = a\cos t$$

$$y(t) = a\operatorname{sen} t.$$

Quando a circunferência não está centrada na origem (ver Figura 2.6), a equação vetorial é dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t)$$

onde $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$

e

$$\vec{r}_1(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\operatorname{sen} t\,\vec{j},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

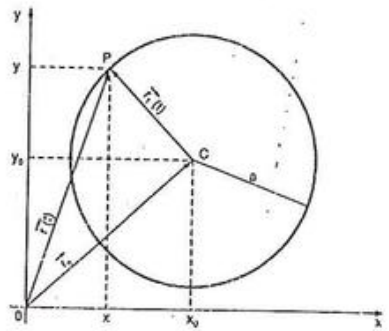


Figura 2.6

Portanto, neste caso, a equação vetorial é dada por

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a\cos t)\vec{i} + (y_0 + a\operatorname{sen} t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{7}$$

De maneira análoga, podemos obter uma equação vetorial para uma circunferência contida no plano xz ou yz. Também podemos obter uma equação vetorial para uma circunferência contida em um plano paralelo a um dos planos coordenados.

2.4.4 Exemplos

(i) Obter equações paramétricas da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ no plano $z = 3$.

Para encontrarmos o centro e o raio da circunferência dada, devemos completar os quadrados da equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

Temos, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Usando (7), obtemos

$$x(t) = 3 + 3\cos t$$

$$y(t) = 2 + 3\operatorname{sen} t$$

$$z(t) = 3 \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

A Figura 2.7 ilustra este exemplo.

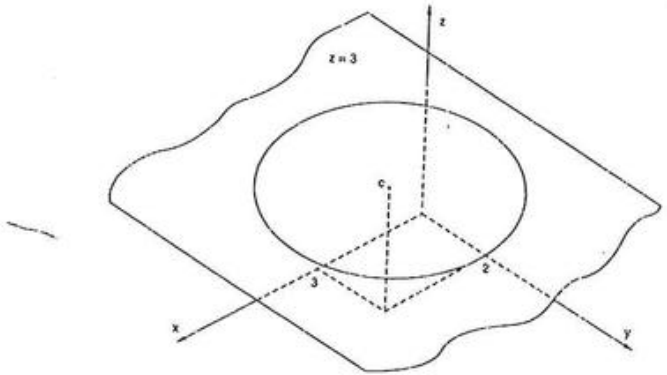


Figura 2.7

(ii) A equação vetorial

$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 3\operatorname{sen} t\,\vec{k}$ representa uma circunferência. Determinar a correspondente equação cartesiana.

As equações paramétricas são

$$x(t) = 2$$

$$y(t) = 3\cos t$$

$$z(t) = 3\operatorname{sen} t \qquad , \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Para determinar a equação cartesiana, devemos eliminar o parâmetro t.

Elevando ao quadrado cada uma das duas últimas equações e somando-as, obtemos

$$y^2 + z^2 = 9\cos^2 t + 9\operatorname{sen}^2 t$$

$$= 9(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)$$

$$= 9.$$

Portanto, a circunferência é dada pela intersecção de $y^2 + z^2 = 9$ e $x = 2$.

2.4.5 Parametrização de uma elipse

Uma equação vetorial de uma elipse, no plano xy, com centro na origem e eixos nas direções dos eixos x e y (ver Figura 2.8) é

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\operatorname{sen} t\,\vec{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi. \tag{8}$$

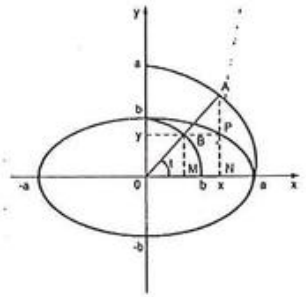


Figura 2.8

Consideramos um ponto $P(x(t), y(t))$ da curva. Traçamos um arco de circunferência de raio a, e outro de raio b, ambos centrados na origem.

Marcamos, respectivamente, sobre esses arcos os pontos A de abscissa x e B de ordenada y. Pode-se verificar que os pontos A, B e a origem estão em uma mesma reta. O parâmetro t representa o ângulo que esta reta faz com o eixo positivo dos x.

Do triângulo retângulo ONA, obtemos $x = a\cos t$, e do triângulo retângulo OMB, $y = b\operatorname{sen} t$.

Se a elipse estiver centrada em (x_0, y_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados (ver Figura 2.9), sua equação vetorial é

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t),$$

onde $\vec{r}_0 = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j}$ e $\vec{r}_1(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\operatorname{sen} t\,\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Assim,

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a\cos t)\vec{i} + (y_0 + b\operatorname{sen} t)\vec{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi. \tag{9}$$

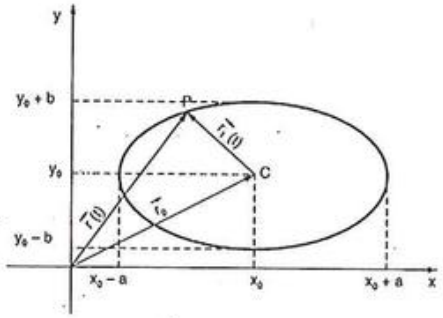


Figura 2.9

2.4.6 Exemplos

(i) Escrever uma equação vetorial da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, no plano xy.

Podemos reescrever $9x^2 + 4y^2 = 36$, como

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Desta forma, usando (8), escrevemos

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 3\operatorname{sen} t\,\vec{j},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

(ii) Escrever uma equação vetorial para a elipse da Figura 2.10.

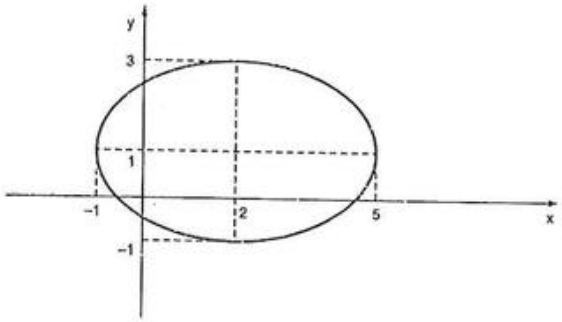


Figura 2.10

Na Figura 2.10, observamos que o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo dos x e mede 6 unidades. O eixo menor é paralelo ao eixo dos y e mede 4 unidades.

O centro da elipse é o ponto (2, 1). Portanto, a equação cartesiana da elipse é

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Suas equações paramétricas são:

$$x(t) = 2 + 3\cos t$$

$$y(t) = 1 + 2\operatorname{sen} t$$

$$z(t) = 0 \qquad , \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

e então, a equação vetorial é

$$\vec{r}(t) = (2 + 3\cos t)\vec{i} + (1 + 2\operatorname{sen} t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

2.4.7 Parametrização de uma hélice circular

A hélice circular é uma curva reversa. Ela se desenvolve sobre a superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$. Este fato pode ser visualizado como segue.

Consideremos parte da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$, como na Figura 2.11.

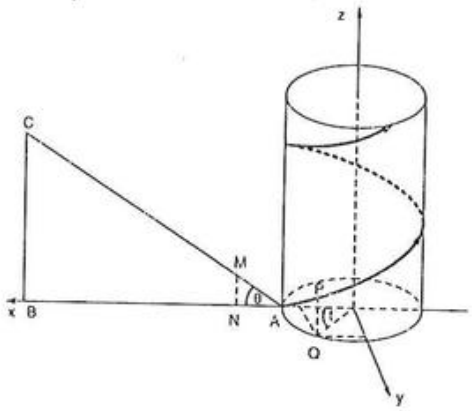


Figura 2.11

Enrolemos à volta da superfície um triângulo retângulo flexível ABC de modo que A é o ponto (a, 0, 0) e que o lado AB se enrola sobre a seção do cilindro no plano xy. A hipotenusa AC determina, então, sobre a superfície cilíndrica uma curva chamada hélice circular.

Para parametrizar a hélice, consideremos um ponto $P(x, y, z)$ da hélice cuja projeção no plano xy é Q. O ponto P se originou do correspondente ponto M sobre a hipotenusa AC. A projeção de M é N e obviamente $\overline{PQ} = \overline{MN}$. Temos ainda $\overline{AN} = \overline{AQ} = at$.

Dessa forma, escrevemos

$$x(t) = a\cos t$$

$$y(t) = a\operatorname{sen} t$$

$$z(t) = \overline{PQ} = \overline{AN}\operatorname{tg}\theta = at\operatorname{tg}\theta,$$

onde θ é o ângulo agudo $B\hat{A}C$.

Podemos fazer tg $\theta = m$ e escrever a equação vetorial da hélice circular como:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\operatorname{sen} t\,\vec{j} + amt\,\vec{k}. \qquad (10)$$

Observamos que (10) representa a equação da hélice esboçada na Figura 2.11, e portanto, $m > 0$. Sua forma lembra um parafuso de rosca à direita. Poderíamos, de maneira análoga, encontrar a equação vetorial de uma hélice onde $m < 0$, cuja forma lembra um parafuso de rosca à esquerda (ver Figura 2.12).

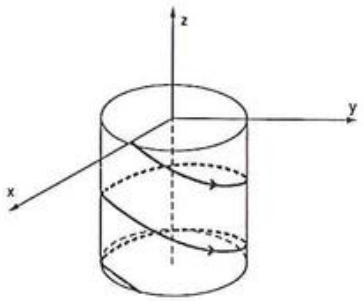


Figura 2.12

2.4.8 Exemplo

Representar graficamente a hélice circular $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + t\vec{k}$ para $0 \le t \le 3\pi$.

Encontrar o seu vetor velocidade e o seu vetor aceleração. Mostrar no gráfico os vetores $\vec{v}\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ e $\vec{a}\left(\frac{9\pi}{4}\right)$.

Já sabemos que a hélice circular dada neste exemplo se desenvolve no cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Podemos tabelar alguns pontos convenientemente (ver Tabela 2.1) e esboçar a curva (ver Figura 2.13).

Tabela 2.1

t	$\vec{r}(t)$
0	$(1, 0, 0)$
$\pi/4$	$\left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ \pi/4\right)$
$\pi/2$	$(0, 1, \pi/2)$
π	$(-1, 0, \pi)$
$3\pi/2$	$(0, -1, 3\pi/2)$
2π	$(1, 0, 2\pi)$
3π	$(-1, 0, 3\pi)$

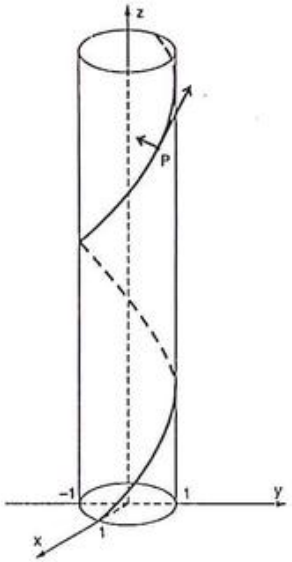


Figura 2.13

O vetor velocidade é dado por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k},$$

e o vetor aceleração é

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t\,\vec{i} - \operatorname{sen} t\,\vec{j}.$$

Portanto,

$$\vec{v}(9\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a}(9\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}.$$

Os vetores $\vec{v}(9\pi/4)$ e $\vec{a}(9\pi/4)$ podem ser vistos na Figura 2.13.

2.4.9 Parametrização de uma ciclóide

A ciclóide é uma curva que surgiu para solucionar dois problemas famosos:

(i) A determinação da forma de um cabo, de um ponto A a um ponto abaixo B, como mostra a Figura 2.14, tal que uma bolinha sem atrito, solta em um ponto P entre A e B sobre o cabo, gaste o mesmo tempo para alcançar B, qualquer que seja a posição de P.

(ii) A determinação de um único cabo que liga A a B, ao longo do qual uma bolinha escorregará de A a B no menor tempo possível.

Figura 2.14

Esses problemas são resolvidos, considerando-se o cabo com a forma de meio arco de uma ciclóide.

A ciclóide pode ser descrita pelo movimento do ponto $P(0, 0)$ de um círculo de raio a, centrado em $(0, a)$, quando o círculo gira sobre o eixo dos x (ver Figura 2.15).

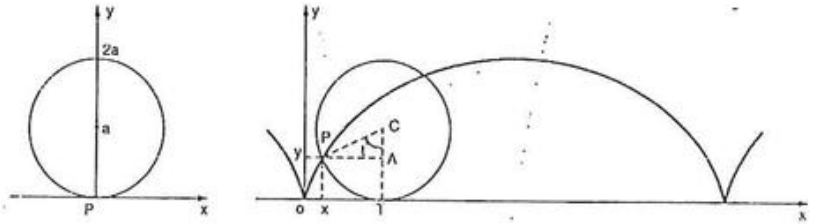


Figura 2.15

Quando o círculo gira um ângulo t, seu centro se move um comprimento $\overline{OT}$. Na Figura 2.15 temos $\overline{OT} = \widehat{TP} = at$, $\overline{CT} = a$, $\overline{CA} = a\cos t$ e $\overline{AP} = a\operatorname{sen} t$.

Portanto, as coordenadas de P são

$$x = \overline{OT} - \overline{AP} = at - a\operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = \overline{AT} = \overline{CT} - \overline{AC} = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Essas equações são válidas para qualquer P. Logo, a equação vetorial da ciclóide é

$$\vec{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}. \tag{11}$$

Quando t varia de 0 a 2π obtemos o primeiro arco da ciclóide.

2.4.10 Exemplo

Escrever a equação vetorial da curva descrita pelo movimento de uma cabeça de prego em um pneu de um carro que se move em linha reta, se o raio do pneu é 25 cm.

Supondo que a cabeça do prego se encontre localizada no pneu no ponto P, conforme Figura 2.15, sua trajetória é uma ciclóide.

Usando (11), temos que

$$\vec{r}(t) = 25(t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + 25(1 - \cos t)\vec{j}.$$

2.4.11 Parametrização de uma hipociclóide

Uma hipociclóide é a curva descrita pelo movimento de um ponto fixo P, de um círculo de raio b, que gira dentro de um círculo fixo de raio a, $a > b$ (ver Figura 2.16).

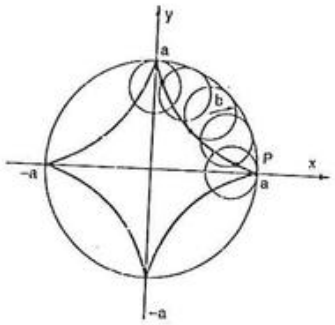


Figura 2.16

Suponhamos que, inicialmente o círculo de raio b tangencia o círculo de raio a no ponto $(a, 0)$ e que o ponto P é este ponto de tangência.

Para parametrizar a curva, vamos analisar a Figura 2.17, onde demarcamos o ponto P quando o ponto de tangência dos dois círculos é T.

Pela construção da curva, temos que os arcos $\overset{\frown}{AT}$ e $\overset{\frown}{PT}$ são iguais.

Portanto,

$$at = b\alpha \text{ e assim } \alpha = \frac{a}{b}t.$$

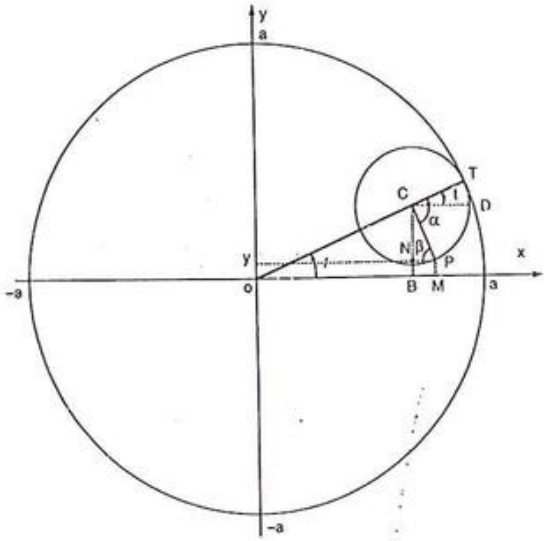


Figura 2.17

Por outro lado, como $\beta = P\hat{C}D$, segue que

$$\beta = \alpha - t$$

$$= \frac{a}{b}t - t$$

$$= \frac{a-b}{b}t.$$

Queremos determinar as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ do ponto P. Temos,

$$x = \overline{OB} + \overline{BM}$$

$$= (a-b)\cos t + b\cos\beta$$

$$= (a-b)\cos t + b\cos\frac{(a-b)}{b}t;$$

$$y = \overline{PM}$$

$$= \overline{BN}$$

$$= \overline{BC} - \overline{CN}$$

$$= (a-b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\beta$$

$$= (a-b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{(a-b)}{b}t.$$

Portanto, as equações paramétricas da hipociclóide são

$$x(t) = (a-b)\cos t + b\cos\frac{(a-b)}{b}t \qquad (12)$$

$$y(t) = (a-b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{(a-b)}{b}t.$$

A equação vetorial correspondente é

$$\vec{r}(t) = \left[(a-b)\cos t + b\cos\frac{(a-b)}{b}t\right]\vec{i} + \left[(a-b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{(a-b)}{b}t\right]\vec{j}. \qquad (13)$$

Os cúspides ocorrem nos pontos onde o ponto de tangência dos dois círculos é o ponto P. Portanto, ocorrem quando

$$at = n \cdot 2\pi b \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ou

$$t = n \cdot 2\pi\frac{b}{a} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Um caso particular muito usado é o da hipociclóide de quatro cúspides (ver Figura 2.18) que é obtida fazendo $b = \frac{a}{4}$.

Substituindo o valor de $b = \frac{a}{4}$ em (12), obtemos

$$x = \frac{a}{4}\,(3\cos t + \cos 3t)$$

$$y = \frac{a}{4}\,(3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t).$$

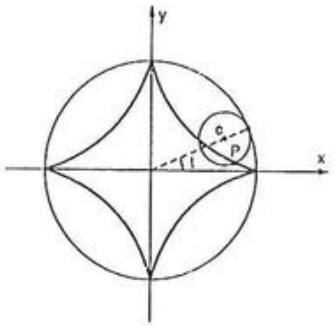


Figura 2.18

Usando as relações trigonométricas

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

$$\operatorname{sen} 3t = 3\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen}^3 t,$$

vem

$$x(t) = a\cos^3 t$$

$$y(t) = a\operatorname{sen}^3 t. \qquad (14)$$

Assim, uma equação vetorial da hipociclóide da Figura 2.18 é dada por

$$\vec{r}(t) = a\cos^3 t\,\vec{i} + a\operatorname{sen}^3 t\,\vec{j} \quad , \; t \in [0,\ 2\pi] \qquad (15)$$

Eliminando o parâmetro t das equações (14), obtemos a equação cartesiana desta hipociclóide, que é dada por

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \qquad (16)$$

2.4.12 Exemplo

Dada $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$, encontrar uma equação vetorial desta hipociclóide. Encontrar o vetor velocidade e o vetor aceleração no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$.

Usando (15), escrevemos a equação vetorial

$$\vec{r}(t) = 2\sqrt{2}\cos^3 t\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\operatorname{sen}^3 t\,\vec{j}.$$

O vetor velocidade é dado por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -6\sqrt{2}\cos^2 t \operatorname{sen} t\,\vec{i} + 6\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 t \cos t\,\vec{j}.$$

O vetor aceleração é

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\sqrt{2}\,(\cos^3 t - 2\operatorname{sen}^2 t \cos t)\,\vec{i} + 6\sqrt{2}\,(2\cos^2 t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t)\,\vec{j}.$$

No ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$, temos que $t = \frac{\pi}{3}$.

Portanto,

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{6}}{4}\,\vec{i} + \frac{9\sqrt{2}}{4}\,\vec{j}$$

e

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{4}\,\vec{i} - \frac{3\sqrt{6}}{4}\,\vec{j}.$$

2.4.13 Parametrização de outras curvas

Na seção 2.1 vimos que uma curva pode ser representada por uma equação vetorial. Existem outras formas de representação de uma curva. Por exemplo, o gráfico de uma função contínua $y = f(x)$ representa uma curva no plano xy. A intersecção de duas superfícies representa, em geral, uma curva no plano ou no espaço.

A seguir, encontraremos uma representação paramétrica para algumas curvas representadas como intersecção de duas superfícies.

2.4.14 Exemplos

(i) Escrever uma equação vetorial para

$$y = 5x + 3 \text{ no plano } z = 2.$$

Solução. A curva C que queremos parametrizar é a intersecção dos planos $y = 5x + 3$ e $z = 2$.

Fazemos

$$x(t) = t$$

$$y(t) = 5t + 3$$

$$z(t) = 2,$$

e então,

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (5t + 3)\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Observamos que esta parametrização não é única. Também poderíamos ter feito, por exemplo,

$$x(t) = 2t + 1$$

$$y(t) = 5(2t + 1) + 3$$

$$z(t) = 2,$$

e então,

$$\vec{r}(t) = (2t + 1)\vec{i} + (10t + 8)\vec{j} + 2\vec{k}.$$

(ii) A intersecção entre as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 + y$ determina uma curva. Escrever uma equação vetorial desta curva.

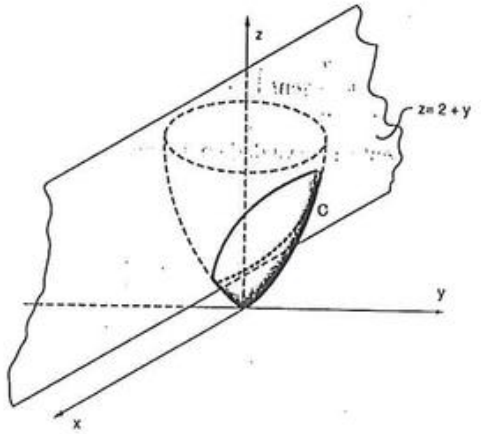


Figura 2.19

A Figura 2.19 mostra um esboço da curva. Para parametrizá-la, observamos que x e y devem satisfazer a equação

$$2 + y = x^2 + y^2 \qquad \text{ou}$$

$$x^2 + y^2 - y = 2 \qquad \text{ou ainda}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

que é uma circunferência de raio $\frac{3}{2}$ e centro $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Esta circunferência é a projeção da curva sobre o plano xy. Fazemos então,

$$x = \frac{3}{2}\cos t$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t \quad , \qquad t \in [0,\ 2\pi].$$

Substituindo o valor de y na equação $z = 2 + y$, obtemos

$$z = 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t.$$

Portanto,

$$\vec{r}(t) = \frac{3}{2}\cos t\,\vec{i} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t\right)\vec{j} + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t\right)\vec{k}, \quad t \in [0,\ 2\pi].$$

(iii) Representar parametricamente a curva dada pela intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

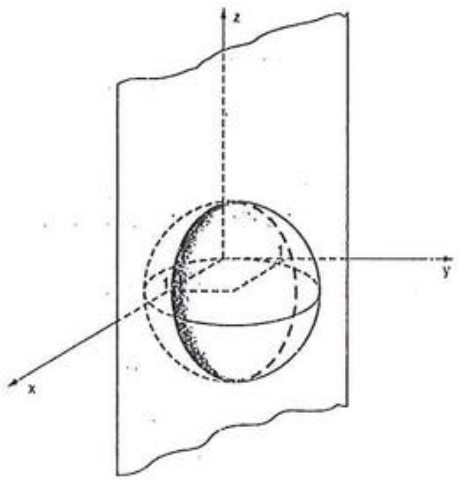


Figura 2.20

A Figura 2.20 mostra um esboço da curva.

Neste exemplo, é conveniente projetar a curva no plano yz ou no plano xz.

Projetando no plano yz, temos

$$(2 - y)^2 + y^2 + z^2 = 2.2$$

$$4 - 4y + y^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$(y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Logo, a elipse $(y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ representa esta projeção.

Usando (9), temos

$$y(t) = 1 + \cos t$$

$$z(t) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \quad , \qquad t \in [0,\ 2\pi].$$

Substituindo o vâlor de y em $x + y = 2$, encontramos

$$x(t) = 2 - (1 + \cos t)$$

$$= 1 - \cos t.$$

Dessa forma,

$$\vec{r}(t) = (1 - \cos t)\vec{i} + (1 + \cos t)\vec{j} + \sqrt{2}\operatorname{sen} t\,\vec{k}, \quad t \in [0,\ 2\pi],$$

é a equação vetorial pedida.

2.5 CURVAS SUAVES

Uma curva pode ter pontos angulosos. Vejamos dois exemplos.

(i) Seja $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}, \quad -1 \le t \le 1.$

A Figura 2.21 mostra esta curva. O ponto $(0, 0)$, correspondente a $t = 0$, é um ponto anguloso. Observamos que $\vec{r}\,'(0) = \vec{0}$.

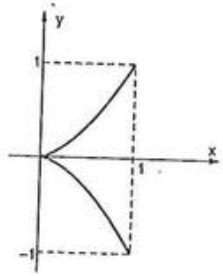


Figura 2.21

(ii) Seja $\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{i} + t\vec{j}\ , & 0 \le t \le 1 \\ t\vec{i} + \vec{j}\ , & 1 \le t \le 2. \end{cases}$

Na Figura 2.22, temos um esboço desta curva. Podemos observar que o ponto (1, 1), correspondente a $t = 1$, é um ponto anguloso e que a derivada $\vec{r}'(1)$ não existe.

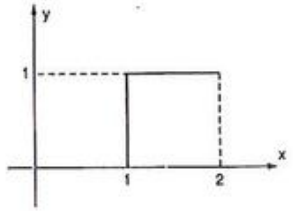


Figura 2.22

Geometricamente, uma curva suave é caracterizada pela ausência de pontos angulosos. Em cada um de seus pontos, a curva tem uma tangente única que varia continuamente quando se move sobre a curva (ver Figura 2.23).

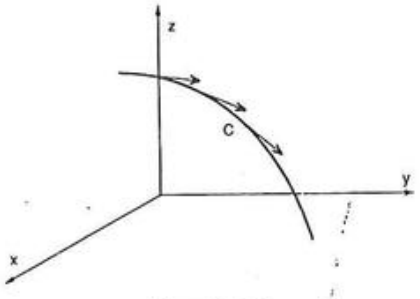


Figura 2.23

Sempre que uma curva C admite uma parametrização $\vec{r}(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que tem derivada contínua $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$, C é uma curva suave ou regular.

Uma curva é suave por partes se puder ser dividida em um número finito de curvas suaves.

2.5.1 Exemplos

(i) Retas, circunferências, elipses, hélices são curvas suaves.

(ii) As curvas dos exemplos 2.5 (i) e (ii) são curvas suaves por partes.

(iii) A ciclóide e a hipociclóide são curvas suaves por partes.

(iv) A Figura 2.24 mostra esboços de curvas suaves por partes.

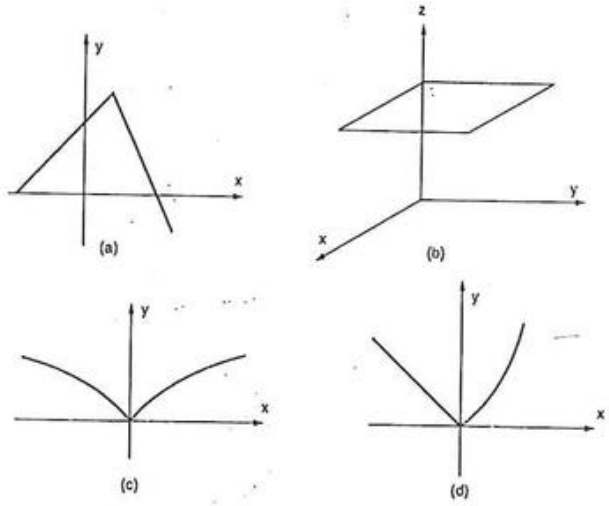


Figura 2.24

2.6 DEFINIÇÃO

a) Uma curva parametrizada $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ é dita fechada se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

b) Se a cada ponto da curva corresponde um único valor do parâmetro t (exceto quando $t = a$ e $t = b$), dizemos que a curva é simples.

2.6.1 Exemplos

(i) A Figura 2.25 mostra esboços de curvas fechadas simples.

Figura 2.25

(ii) A Figura 2.26 mostra esboços de curvas que não são simples.

Figura 2.26

2.7 ORIENTAÇÃO DE UMA CURVA

Se um ponto material desloca-se sobre uma curva suave C, temos dois possíveis sentidos de percurso. A escolha de um deles como sentido positivo, define uma orientação na curva C.

Suponhamos que a curva C seja representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad , \quad t \in [a, b]$$

Convencionamos chamar de sentido positivo sobre C, o sentido no qual a curva é traçada quando o parâmetro t cresce de a até b (ver Figura 2.27). O sentido oposto é chamado sentido negativo sobre C.

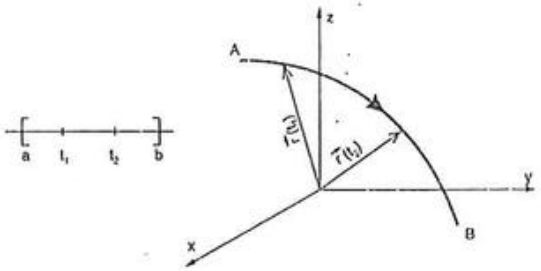


Figura 2.27

De acordo com nossa convenção, sempre que uma curva suave C é representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad , \quad t \in [a, b],$$

C é uma curva orientada e o seu sentido positivo de percurso é o sentido dos valores crescentes do parâmetro t.

Se uma curva simples C é suave por partes, podemos orientá-la, como mostra a Figura 2.28, orientando cada parte suave de C.

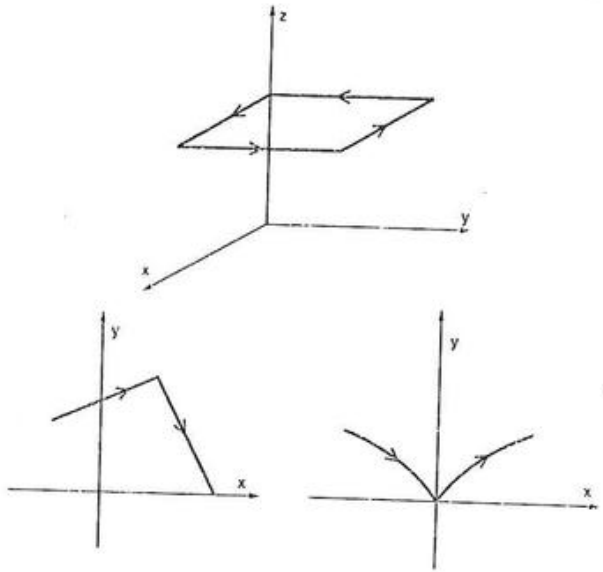


Figura 2.28

2.7.1 Definição

Dada uma curva orientada C, representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad , \quad t \in [a, b];$$

a curva $-C$ é definida como sendo a curva C com orientação oposta. A curva $-C$ é dada por

$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(a + b - t)$$
$$= x(a + b - t)\vec{i} + y(a + b - t)\vec{j} + z(a + b - t)\vec{k} \quad , \quad t \in [a, b].$$

2.7.2 Exemplos

(i) Na parametrização da reta do Exemplo 2.4.2 (ii), o sentido positivo de percurso é do ponto A para o ponto B.

(ii) O sentido positivo de percurso sobre uma circunferência parametrizada como em 2.4.3, é o sentido anti-horário.

(iii) Parametrizar a circunferência de centro na origem e raio a no sentido horário.

Solução. Queremos a curva $-C$, onde

$$C: \vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\operatorname{sen} t\,\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pela definição 2.7.1, temos

$$-C: \vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(0 + 2\pi - t)$$
$$= a\cos(2\pi - t)\vec{i} + a\operatorname{sen}(2\pi - t)\vec{j},$$
$$= a\cos\vec{i} - a\operatorname{sen} t\,\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

A Figura 2.29 ilustra este exemplo.

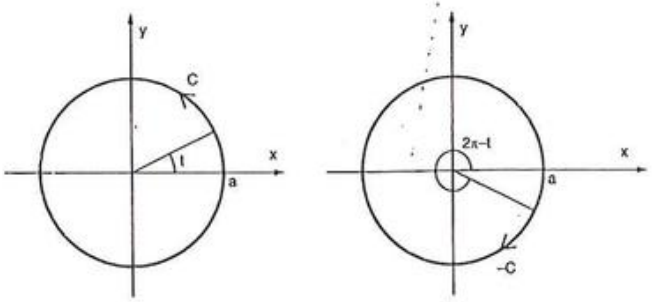


Figura 2.29

(iv) Parametrizar o segmento de reta que une o ponto $A(0, 0, 1)$ ao ponto $B(1, 2, 3)$, no sentido de A para B.

Conforme 2.4.1, a reta que passa pelos pontos A e B pode ser parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}.$$

Podemos escolher o vetor posição $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Como queremos o segmento de reta de A para B, o vetor direção $\vec{b}$ é dado por $\vec{b} = (1, 2, 3) - (0, 0, 1) = (1, 2, 2)$.

Temos então,

$$\vec{r}(t) = (0, 0, 1) + t(1, 2, 2)$$
$$= (t, 2t, 1 + 2t).$$

Precisamos determinar o intervalo de variação do parâmetro t.

Como o vetor posição do ponto A é $(0, 0, 1)$, o correspondente valor de t satisfaz

$$(t, 2t, 1 + 2t) = (0, 0, 1).$$

Portanto, $t = 0$.

No ponto B, temos

$(t, 2t, 1 + 2t) = (1, 2, 3)$ e conseqüentemente, $t = 1$.

Uma equação do segmento de reta que une o ponto A ao ponto B é dada por

$$\vec{r}(t) = (t, 2t, 1 + 2t) \quad , \quad t \in [0, 1].$$

A Figura 2.30 ilustra este exemplo.

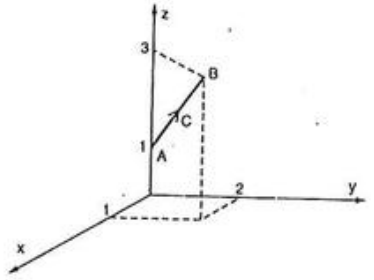


Figura 2.30

Observamos que sempre que queremos parametrizar um segmento de reta com orientação de A para B, podemos tomar o vetor $\vec{a}$ como sendo o vetor posição do ponto A e o vetor direção $\vec{b}$ como $B - A$. Neste caso, o parâmetro t terá uma variação no intervalo $[0, 1]$.

Sempre que nos referimos a um segmento que une o ponto A ao ponto B estaremos entendendo que o sentido é de A para B.

(v) Parametrizar o segmento de reta que une o ponto $(1, 2, 3)$ ao ponto $(0, 0, 1)$ (ver Figura 2.31).

Fazemos $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$, onde

$$\vec{a} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{b} = (0, 0, 1) - (1, 2, 3)$$

$$= (-1, -2, -2).$$

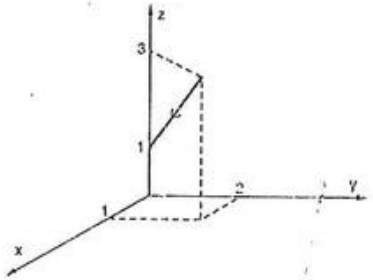


Figura 2.31

Temos,

$$\vec{r}(t) = (1, 2, 3) + t(-1, -2, -2)$$

$$= (1 - t, 2 - 2t, 3 - 2t), \quad t \in [0, 1].$$

Também poderíamos ter usado o resultado do Exemplo (iv) e a definição 2.7.1.

De fato, como

$$\vec{r}(t) = (t, 2t, 1 + 2t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\vec{r}^{-}(t) = \vec{r}(0 + 1 - t)$$

$$= (1 - t, 2(1 - t), 1 + 2(1 - t))$$

$$= (1 - t, 2 - 2t, 3 - 2t), \quad t \in [0, 1].$$

2.8 RETA TANGENTE

Seja C uma curva suave representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}, \quad t \in [a, b].$$

Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de C e t_0 o correspondente valor do parâmetro t. Conforme vimos em 1.9.3, o vetor $\vec{r}'(t_0)$ é tangente à curva C em P.

Portanto, uma parametrização da reta tangente à curva C no ponto P, é dada por

$\vec{q}(\omega) = \vec{r}(t_0) + \omega\vec{r}'(t_0)$, onde ω é um parâmetro real (ver Figura 2.32).

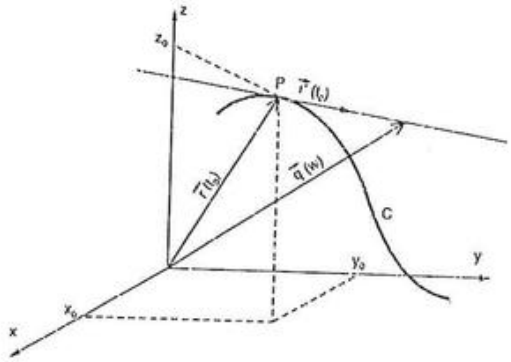


Figura 2.32

2.8.1 Exemplos

(i) Determinar a reta tangente à curva

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j}, \text{ no ponto } P(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Temos,

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j};$$

$$\vec{r}'(t) = -2\operatorname{sen} t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j}.$$

Para obter o valor de t_0, correspondente ao ponto P, usamos as equações paramétricas da curva, que são dadas por

$$x = 2\cos t$$

$$y = 2\operatorname{sen} t.$$

No ponto $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$, temos

$$\sqrt{2} = 2\cos t_0$$

$$\sqrt{2} = 2\operatorname{sen} t_0.$$

Portanto, $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

A equação da reta tangente será dada por

$$\vec{q}(\omega) = \vec{r}(t_0) + \omega\vec{r}'(t_0)$$

$$= \left(2\cos\frac{\pi}{4}\,\vec{i} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\,\vec{j}\right) + \omega\left(-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\,\vec{i} + 2\cos\frac{\pi}{4}\,\vec{j}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\omega\right)\vec{i} + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\omega\right)\vec{j}.$$

A Figura 2.33 ilustra este exemplo.

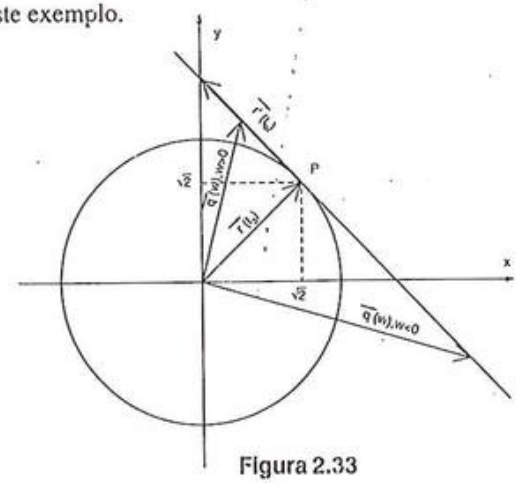


Figura 2.33

(ii) Determinar a equação de uma reta T, que passa no ponto $(1, 0)$ e é tangente à curva C dada por

$$\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j}\quad,\quad t \geq 0.$$

Solução: Para $t > 0$, o vetor $\vec{r}'(t) = 2t\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j}$ é tangente à curva C.

Portanto, como a reta T passa no ponto $(1, 0)$ e é tangente à curva C, ela pode ser representada por

$$\vec{q}(\omega) = (1,\ 0) + \left(2t,\ 3t^2\right)\omega$$

$$= \left(1 + 2t\omega,\ 3t^2\omega\right).$$

Precisamos determinar o valor de t. Para isso, observamos que, no ponto de tangência, os vetores $\vec{r}(t)$ e $\vec{q}(\omega)$ coincidem. Assim, temos

$$t^2 = 1 + 2t\omega$$

$$t^3 = 3t^2\omega.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $t = \pm\sqrt{3}$. Como $\vec{r}(t)$ é definida para $t \geq 0$, o valor procurado é $t = +\sqrt{3}$.

A equação da reta t é dada por

$$\vec{q}(\omega) = \left(1 + 2\sqrt{3}\,\omega,\ 9\omega\right).$$

A Figura 2.34 ilustra este exemplo.

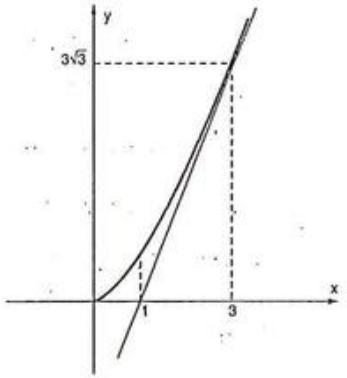


Figura 2.34

2.9 EXERCÍCIOS

1. Esboçar o gráfico da curva descrita por um ponto móvel $P(x, y)$, quando o parâmetro t varia no intervalo dado. Determinar a equação cartesiana da curva em cada um dos itens:

   a) $x = 2\cos t$

   $y = 2\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

   b) $x = 4\cos t$

   $y = 4\operatorname{sen} t$

   $z = 2 \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

   c) $x = 2 + 4\operatorname{sen} t$

   $y = 3 - 2\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

   d) $x = t + 1$

   $y = t^2 + 4$

   $z = 2 \quad , \quad -\infty < t < +\infty.$

2. Obter a equação cartesiana das seguintes curvas:

   a) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t,\ 3t + 5\right)$

   b) $\vec{r}(t) = (t - 1,\ t^2 - 2t + 2)$

   c) $\vec{r}(t) = (s^2 - 1,\ s^2 + 1,\ 2).$

3. Determinar o centro e o raio das seguintes circunferências e depois escrever uma equação vetorial para cada uma.

   a) $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$

   b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

   c) $x^2 + y^2 + 5y - 2 = 0.$

4. Identificar as curvas abaixo e parametrizá-las. Esboçar o seu gráfico.

   a) $2x^2 + 2y^2 + 5x + 2y - 3 = 0$

   b) $2x^2 + 5y^2 - 6x - 2y + 4 = 0$

   c) $x^2 + 2y^2 - 4x - 2y = 0$

   d) $x^2 - 8y + 4 = 0$

   e) $y - \frac{1}{x - 1} = 0, \quad x > 1$

5. Verificar que a curva

   $\vec{r}(t) = 3\cosh t\,\vec{i} + 5\operatorname{senh} t\,\vec{j}$ é a metade de uma hipérbole. Encontrar a equação cartesiana.

6. Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelo ponto A, na direção do vetor $\vec{b}$, onde:

   a) $A\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$

   b) $A(0, 2)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j}$

   c) $A(-1, 2, 0)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$

   d) $A(\sqrt{2}, 2, \sqrt{3})$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{k}.$

7. Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos A e B, onde:

   a) $A(2, 0, 1)$ e $B(-3, 4, 0)$

   b) $A(5, -1, -2)$ e $B(0, 0, 2)$

   c) $A\left(-\sqrt{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$ e $B(-7, 2, 9)$

   d) $A\left(\pi, \frac{\pi}{2}, 3\right)$ e $B(\pi, -1, 2)$

8. Determinar uma representação paramétrica da reta representada por:

a) $y = 5x - 1,\ z = 2$

b) $2x - 5y + 4z = 1, \quad 3x - 2y - 5z = 1$

c) $2x - 5y + z = 4, \quad y - x = 4.$

9. Encontrar uma equação vetorial das seguintes curvas:

a) $x^2 + y^2 = 4,\ z = 4$

b) $y = 2x^2,\ z = x^3$

c) $2(x + 1)^2 + y^2 = 10,\ z = 2$

d) $y = x^{1/2},\ z = 2$

e) $x = e^y,\ z = e^x$

f) $y = x,\ z = x^2 + y^2$

g) Segmento de reta de $A(2, 1, 2)$ a $B(-1, 1, 3)$

h) Circunferência de centro em (2, 2) e raio 2 no sentido anti-horário

i) Circunferência de centro em (2, 2) e raio 2 no sentido horário

j) Segmento de reta de $C(0, 0, 1)$ a $D(1, 0 0)$

k) Parábola $y = \pm\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$

l) Segmento de reta de $A(1, -2, 3)$ a $B(-1, 0, -1)$

m) $y = x^3 - 7x^2 + 3x - 2,\ 0 \le x \le 3$

n) $x + y + z = 1,\ z = x - 2y$

o) $x^2 + y^2 = 1,\ z = 2x - 2y$

p) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y,\ z = y$

q) Segmento de reta de $E(3, 3, -2)$ a $F(4, 5, -2)$.

10. Esboçar as curvas seguintes, representando o sentido positivo de percurso. Obter uma parametrização da curva dada, orientada no sentido contrário.

a) $\vec{r}(t) = (2 + 3\cos t,\ 1 + 4\operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$

b) $\vec{r}(t) = (t,\ t + 2,\ 2t + 1),\ t \in [0, 1]$

c) $\vec{r}(t) = (2t - 1,\ 2t + 1,\ 4 - 2t),\ t \in [1, 2]$

d) $\vec{r}(t) = (t - 1,\ t^2 - 2t + 1),\ t \in [-1, 2]$

e) $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$

f) $\vec{r}(t) = (1 + \cos t,\ 1 + \operatorname{sen} t,\ 2t),\ t \in [0, 4\pi]$

g) $\vec{r}(t) = (2\cos^3 t,\ 2\operatorname{sen}^3 t),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

11. Determinar uma equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados.

a) $\vec{r}(t) = (\cos t,\ 2\operatorname{sen} t);\ P_0(1, 0);\ P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$

b) $z = 4 - x^2,\ y = 2;\ P_0(1, 2, 3)$

c) $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 4t);\ P_0\left(1, -\sqrt{3}, \frac{-4\pi}{3}\right)$

d) $\vec{r}(t) = t^2 i + t^3 j;\ P_0(4, -8)$

e) $\vec{r}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t^2);\ t_0 = \frac{\pi}{2}$

f) $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 3t);\ t_0 = \frac{\pi}{3}$

g) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t},\ \frac{1}{t},\ t^2\right);\ t_0 = 2$

h) $\vec{r}(t) = \left(e^{3t},\ e^{-3t},\ 3\sqrt{2t}\right);\ t_0 = 0$

i) $\vec{r}(t) = (t,\ t^3,\ t^4);\ P_0 = (1, 1, 1).$

12. Determinar a equação de uma reta s que é tangente à curva

$\vec{r}(t) = \left(t, \frac{1}{t-1}\right)$, $t < 1$ e passa na origem.

13. Se $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ para todos os reais t, determinar todos os pontos da curva descrita por $\vec{r}(t)$ nos quais o vetor tangente é paralelo ao vetor (4, 4, 3). Existem alguns pontos nos quais a tangente é perpendicular a (4, 4, 3)?

14. Determinar a equação da reta tangente à curva

$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$ em um ponto qualquer da curva.

15. Determinar os pontos em que a curva

$\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j} + 3t\,\vec{k}$ corta o plano $3x - 2y - z + 7 = 0$.

16. Verificar que a curva $\vec{r}(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\operatorname{sen} t\,\vec{j} + t\vec{k}$, $t \geq 0$ está sobre um cone.

17. Verificar quais das seguintes curvas são suaves:

a) $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in [-1, 1]$

b) $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

c) $\vec{r}(t) = 2(t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j}$, $t \in [\pi, 3\pi]$

d) $\vec{r}(t) = (3\cos^3 t, 3\operatorname{sen}^3 t)$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

e) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

18. Verificar que as equações vetoriais

$r(\omega) = (\omega, \omega^2)$, $2 \leq \omega \leq 3$

e $\vec{r}(t) = (\sqrt{t}, t)$, $4 \leq t \leq 9$

representam a mesma curva.

2.10 COMPRIMENTO DE ARCO

Seja C uma curva dada pela equação vetorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

Vamos calcular o comprimento ℓ de um arco $\overset{\frown}{AB}$, com $t \in [a, b]$.

Seja

$$P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$$

uma partição qualquer de $[a, b]$. Indicamos por ℓ_n o comprimento da poligonal de vértices

$$A = P_0 = \vec{r}(t_0),\ P_1 = \vec{r}(t_1),\ \ldots,\ B = P_n = \vec{r}(t_n).$$

Então,

$$\ell_n = \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}. \qquad (1)$$

Na Figura 2.35 visualizamos uma curva C, onde a poligonal foi traçada para $n = 6$.

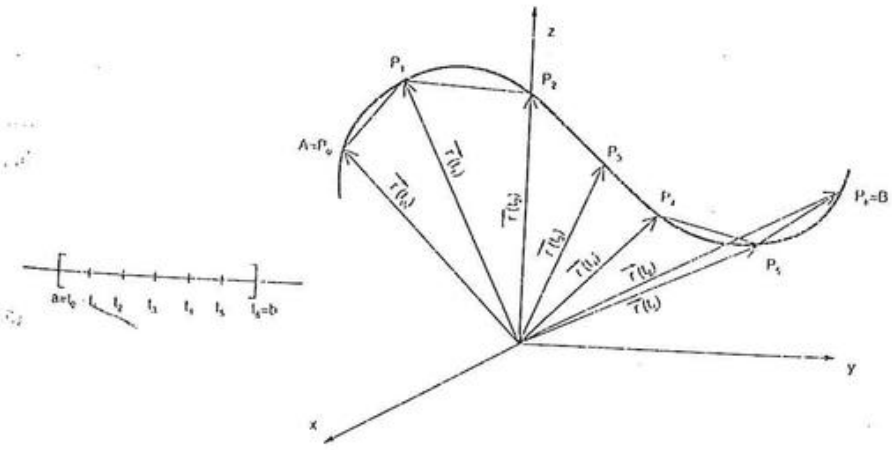


Figura 2.35

Intuitivamente, podemos afirmar que se o limite de ℓ_n quando $n \to \infty$ existe, este limite define o comprimento ℓ do arco $\overset{\frown}{AB}$ da curva C, ou seja,

$$\ell = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \ell_n, \qquad \text{onde } \Delta t_i = |t_i - t_{i-1}| \tag{2}$$

Se a curva C é suave, podemos encontrar uma fórmula para calcular o limite de (2). Temos o seguinte teorema.

2.10.1 Teorema

Seja C uma curva suave parametrizada por $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$. Então,

$$\ell = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt. \tag{3}$$

Prova. Para provarmos este teorema, vamos utilizar o seguinte resultado cuja demonstração será omitida.

"Se as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$, e se P é uma partição do intervalo $[a, b]$ (P: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$), e $\bar{t}_i$, $\bar{\bar{t}}_i$ e $\bar{\bar{\bar{t}}}_i$ são números quaisquer em (t_{i-1}, t_i), então

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[x(\bar{t}_i)^2 + \left[y(\bar{\bar{t}}_i)\right]^2 + \left[z(\bar{\bar{\bar{t}}}_i)\right]^2\right]}\, \Delta t_i =$$

$$= \int_a^b \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2}\, dt." \tag{4}$$

Se C é uma curva suave em $[a, b]$, temos que $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções deriváveis em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição P. Assim, pelo teorema do valor médio, existem números $\bar{t}_i$, $\bar{\bar{t}}_i$ e $\bar{\bar{\bar{t}}}_i$ em (t_{i-1}, t_i) tais que

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\bar{t}_i)\, \Delta t_i \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\bar{\bar{t}}_i)\, \Delta t_i \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) &= z'(\bar{\bar{\bar{t}}}_i)\, \Delta t_i \end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo (5) em (1) e (2), obtemos

$$\ell_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[x'(\bar{t}_i)\right]^2 + \left[y'(\bar{\bar{t}}_i)\right]^2 + \left[z'(\bar{\bar{\bar{t}}}_i)^2\right]}\, \Delta t_i$$

e

$$\ell = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[x'(\bar{t}_i)\right]^2 + \left[y'(\bar{\bar{t}}_i)\right]^2 + \left[z'(\bar{\bar{\bar{t}}}_i)\right]^2}\, \Delta t_i. \tag{6}$$

Usando (4), escrevemos

$$\ell = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt,$$

que é o resultado procurado.

Se a curva C é suave por partes, seu comprimento é dado por

$$\ell = \int_a^{t_1} |\vec{r}'(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} |\vec{r}'(t)|dt + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{b} |\vec{r}'(t)|dt,$$

onde $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, b]$ são os subintervalos de $[a, b]$ nos quais a curva C é suave.

2.10.2 Exemplos

(i) Encontrar o comprimento do arco da curva cuja equação vetorial é

$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^{2/3}\vec{j}$, para $1 \le t \le 4$.

Temos,

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + \frac{2}{3} t^{-1/3} \vec{j}$$

e

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^{-2/3}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{4}{9t^{2/3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{9t^{2/3} + 4}{9t^{2/3}}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(9t^{2/3} + 4\right)^{1/2} t^{-1/3}.$$

Aplicando (3), obtemos

$$\ell = \frac{1}{3}\int_1^4 \left(9t^{2/3} + 4\right)^{1/2} t^{-1/3}\, dt.$$

Esta integral pode ser resolvida por substituição, fazendo $u = 9t^{2/3} + 4$.

Temos,

$$\ell = \frac{1}{3}\int_1^4 \left(9t^{2/3} + 4\right)^{1/2} t^{-1/3}\, dt$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \frac{\left(9t^{2/3} + 4\right)^{3/2}}{3/2} \Bigg|_1^4$$

$$= \frac{1}{27}\left[\left(9.4^{2/3} + 4\right)^{3/2} - \left(9.1^{2/3} + 4\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[\left(18\sqrt[3]{2} + 4\right)^{3/2} - 13\sqrt{13}\right]$$

(ii) Encontrar o comprimento da hélice circular

$\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ do ponto $A(1, 0, 0)$ a $B(-1, 0, \pi)$.

Temos que

$$\vec{r}\,'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{2}.$$

Para $A(1, 0, 0)$ temos $t = 0$ e para $B(-1, 0, \pi)$ temos $t = \pi$.

Usando (3), obtemos

$$\ell = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\, dt$$

$$= \pi\sqrt{2}.$$

2.10.3 Função comprimento de arco

Na integral $\ell = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt$, se substituimos o limite superior b por um limite variável $t, t \in [a, b]$, a integral se transforma em uma função de t.

Escrevemos,

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}\,'(t')|\, dt'. \tag{7}$$

A função $s = s(t)$ é chamada função comprimento de arco e mede o comprimento de arco de C no intervalo $[a, t]$.

2.10.4 Exemplos

(i) Escrever a função comprimento de arco da circunferência de raio R.

Vamos usar (7), observando que o limite inferior de integração a, pode ser substituído por qualquer outro valor t_0, $t_0 \in [a, b]$, isto é, o ponto da curva correspondente a $s = 0$ pode ser escolhido de maneira arbitrária.

Escolhendo $a = 0$, temos

$$s(t) = \int_0^t R\, dt'$$

$$= Rt, \text{ onde usamos } \vec{r}(t) = R\cos t\, \vec{i} + R\operatorname{sen} t\, \vec{j}.$$

(ii) Encontrar a função comprimento de arco da hélice circular

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t).$$

Vamos novamente usar (7) e escolher $a = 0$. Temos,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{5}\, dt'$$

$$= \sqrt{5}\, t.$$

2.10.5 Reparametrização de curvas por comprimento de arco

É conveniente parametrizarmos algumas curvas usando como parâmetro o comprimento de arco s.

Para reparametrizarmos uma curva suave C, dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b] \tag{8}$$

procedemos como segue.

(i) Calculamos $s = s(t)$, usando (7).

(ii) Encontramos a sua inversa $t = t(s)$, $0 \le s \le \ell$.

(iii) Finalmente, reescrevemos (8) como

$$\vec{h}(s) = \vec{r}(t(s))$$

$$= x(t(s))\vec{i} + y(t(s))\vec{j} + z(t(s))\vec{k}, \quad 0 \le s \le \ell.$$

Temos então, que $\vec{h}(s)$ descreve a mesma curva C que era dada por $\vec{r}(t)$, mas com uma nova parametrização, onde a variável s, $0 \le s \le \ell$, representa o comprimento de arco de C.

2.10.6 Exemplos

(i) Reparametrizar pelo comprimento de arco a curva

$$C: \vec{r}(t) = (R\cos t,\ R\operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

A função $s = s(t)$ já foi calculada no Exemplo 2.10.4 (i).

Temos,

$$s = s(t) = Rt.$$

Esta função é uma função linear, cuja inversa é

$$t = t(s) = \frac{s}{R}, \qquad 0 \le s \le 2\pi R.$$

Portanto,

$\vec{h}(s) = \vec{r}(t(s)) = \left(R\cos\frac{s}{R},\ R\operatorname{sen}\frac{s}{R}\right)$, $0 \le s \le 2\pi R$, é a reparametrização da circunferência dada.

(ii) Reparametrizar pelo comprimento de arco a curva dada por

$$\vec{r}(t) = (e^t\cos t,\ e^t\operatorname{sen} t), \quad t \ge 0.$$

Vamos calcular a função comprimento de arco $s = s(t)$.

Temos,

$$\vec{r}\,'(t) = (e^t\cos t - e^t\operatorname{sen} t,\ e^t\cos t + e^t\operatorname{sen} t)$$

e

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{2}\, e^t.$$

Logo,

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\, e^{t'}\, dt'$$

$$= \sqrt{2}\,(e^t - 1).$$

Podemos escrever

$$t = t(s) = \ln\left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \qquad s \ge 0$$

e então

$$\vec{h}(s) = \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right),\ \text{sen}\left(\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right),\ s \geq 0.$$

(iii) Dada uma curva C representada por $\vec{r}(t)$, mostrar que se $|\vec{r}'(t)| = 1$, então o parâmetro t é o parâmetro comprimento de arco de C.

De acordo com (7), temos

$$s = s(t) = \int_0^t \vec{r}'(t^*)\ dt^*.$$

Como $\vec{r}'(t) = 1$, vem

$$s = \int_0^t dt^*$$

$$= t.$$

O parâmetro t é o parâmetro comprimento de arco s, de C.

(iv) Verificar que a curva

$$C:\ \vec{h}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{5}},\ \frac{2s}{\sqrt{5}}\right),\ s \geq 0$$

está parametrizada pelo comprimento de arco.

Basta aplicar o resultado do exemplo anterior.

Temos,

$$\vec{h}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

$$|\vec{h}'(s)| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}$$

$$= 1.$$

Portanto, a curva C dada tem como parâmetro o comprimento de arco.

(v) Seja C uma curva suave reparametrizada pelo comprimento de arco. Mostrar que, se C é representada por $\vec{h}(s)$, então $|\vec{h}'(s)| = 1$.

Temos,

$$\vec{h}(s) = \vec{r}(t(s)).$$

Usando a regra da cadeia, vem

$$\vec{h}'(s) = \vec{r}'(t(s)).\frac{dt}{ds}. \tag{9}$$

Como $t(s)$ é a inversa de $s(t)$ e $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$ temos que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|}.$$

Substituindo em (9), vem

$$\vec{h}'(s) = \vec{r}'(t(s)) \cdot \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|}.$$

Portanto,

$$|\vec{h}'(s)| = \left|\frac{\vec{r}'(t(s))}{|\vec{r}'(t(s))|}\right|$$

$$= 1.$$

2.11 VETOR TANGENTE UNITÁRIO

Dada uma curva suave C, queremos encontrar, em cada ponto de C, um vetor tangente à curva C, que seja unitário.

Em 1.9.3, vimos que se a curva C é representada por

$$\vec{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)),$$

o vetor $\vec{r}'(t)$ é tangente à curva C.

O vetor

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \tag{1}$$

é denominado vetor tangente unitário à curva C.

Por outro lado, no Exemplo 2.10.6 (v) vimos que quando C é representada por $\vec{h}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, onde s é o parâmetro comprimento de arco, $|\vec{h}'(s)| = 1$. Assim, neste caso, o vetor tangente unitário é dado por

$$\vec{u}(s) = \vec{h}'(s). \tag{2}$$

2.11.1 Exemplo

Encontrar o vetor tangente unitário à circunferência de raio 2, centrada na origem, no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Uma parametrização dessa circunferência é dada por

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Usando (1), temos

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$= \frac{(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)}{2}$$

$$= (-\operatorname{sen} t, \cos t).$$

Para $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, temos que $t = \frac{\pi}{4}$, e então $\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é o vetor tangente unitário à curva em $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Poderíamos também chegar a esse resultado usando (2). Fazendo a reparametrização, usando o comprimento de arco s como parâmetro, vem

$$\vec{h}(s) = \left(2\cos\frac{s}{2}, 2\operatorname{sen}\frac{s}{2}\right).$$

Temos,

$$\vec{u}(s) = \vec{h}'(s)$$

$$= \left(-\operatorname{sen}\frac{s}{2}, \cos\frac{s}{2}\right).$$

No ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ temos $s = \frac{\pi}{2}$ e então,

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2.11.2 Proposição

Seja C uma curva suave dada por $\vec{h}(s)$, onde s é o parâmetro comprimento de arco de C. Se $\vec{u}(s)$ é o vetor tangente unitário de C e $\vec{u}'(s) \neq 0$, então $\vec{u}'(s)$ é ortogonal a $\vec{u}(s)$ e aponta para o lado côncavo de C.

Prova parcial. Provaremos que $\vec{u}'(s)$ é ortogonal a $\vec{u}(s)$ e a seguir daremos uma visualização geométrica de que $\vec{u}'(s)$ aponta para o lado côncavo de C.

Desde que $\vec{u} = \vec{u}(s)$ é unitário, temos

$$|\vec{u}| = 1$$

$$\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = 1$$

$$\vec{u}.\vec{u} = 1.$$

Derivando, obtemos

$$\vec{u}'.\vec{u} + \vec{u}.\vec{u}' = 0$$

$$2\vec{u}'.\vec{u} = 0$$

$$\vec{u}'.\vec{u} = 0.$$

Logo, $\vec{u}'$ é ortogonal a $\vec{u}$.

Para verificar que $\vec{u}'(s)$ aponta para o lado côncavo de C, vamos analisar geometricamente a expressão

$$\vec{u}'(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{u}(s + \Delta s) - \vec{u}(s)}{\Delta s}.$$

Observando a Figura 2.36(a), vemos que para $\Delta s > 0$, o vetor $\Delta\vec{u} = \vec{u}(s + \Delta s) - \vec{u}(s)$ aponta para o lado côncavo de C. Como $\Delta s > 0$, o mesmo ocorre com o limite de $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta s}$ quando $\Delta s \to 0^+$.

Para $\Delta s < 0$, o vetor $\Delta\vec{u}$ aponta para o lado convexo de C (ver Figura 2.36(b)). Porém, como Δs é negativo, o vetor $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta s}$ aponta para o lado oposto de $\Delta\vec{u}$. Desta forma, o limite de $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta s}$ quando $\Delta s \to 0^-$ aponta para o lado côncavo de C.

Concluímos assim, que $\vec{u}'(s)$ aponta para o lado côncavo de C.

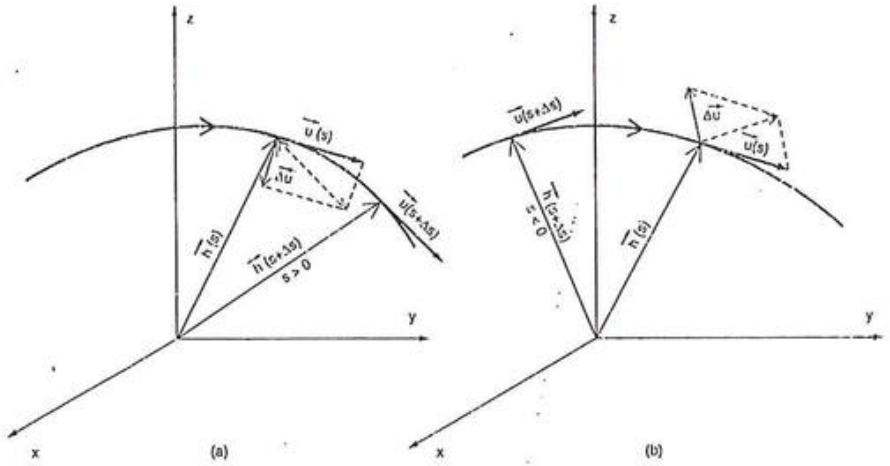


Figura 2.36

2.11.3 Exemplo

Seja C a hélice circular dada por $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ \sqrt{5}\,t)$. Representar geometricamente o vetor tangente unitário $\vec{u}(t)$ e o vetor $\vec{u}'(t)$ no ponto $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \frac{\sqrt{5}\pi}{4}\right)$.

Temos,

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\operatorname{sen} t,\ \frac{2}{3}\cos t,\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

e

$$\vec{u}'(t) = \left(-\frac{2}{3}\cos t,\ -\frac{2}{3}\operatorname{sen} t,\ 0\right).$$

O valor de t correspondente ao ponto P é $t = \frac{\pi}{4}$. Portanto, nesse ponto, temos

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

e

$$\vec{u}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{-\sqrt{2}}{3},\ 0\right).$$

A Figura 2.37, mostra os vetores $\vec{u}$ e $\vec{u}'$ encontrados.

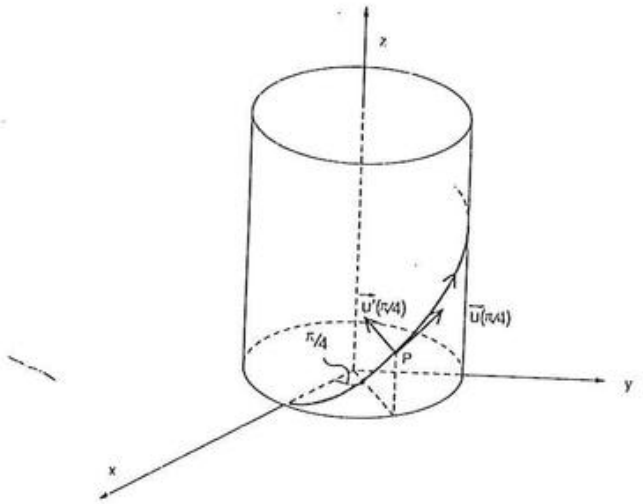


Figura 2.37

2.12 CURVATURA

A Figura 2.38 mostra duas curvas C_1 e C_2, onde representamos os vetores tangentes unitários em alguns pontos.

Figura 2.38

Podemos observar que na curva C_2, a direção do vetor tangente unitário varia mais rapidamente quando nos deslocamos sobre a curva. Temos a seguinte definição:

2.12.1 Definição

Seja C uma curva suave dada por $\vec{h}(s)$, $0 \leq s \leq \ell$. Definimos a curvatura de C em um ponto como

$$k(s) = |\vec{u}'(s)| \tag{1}$$

ou

$$k(s) = |\vec{h}''(s)|.$$

A expressão (1) nos diz que a curvatura é a taxa de variação do vetor tangente unitário $\vec{u}(s)$ em relação ao comprimento de arco s. Como este vetor não varia em intensidade, ela exprime a razão de variação da direção do vetor $\vec{u}(s)$. Assim, geometricamente, podemos dizer que a curvatura $k(s)$ nos dá a razão de variação da direção da tangente, quando esta se desloca sobre a curva.

2.12.2 Proposição

Se uma curva suave C é dada por $\vec{r}(t)$, onde t é um parâmetro qualquer, sua curvatura pode ser expressa por

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}. \tag{2}$$

Prova. Seja s o parâmetro comprimento de arco de C e $\vec{u} = \vec{u}(s)$ o vetor tangente unitário. Podemos escrever,

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \vec{u}\,\frac{ds}{dt};$$

$$\vec{r}''(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{u}\,\frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt}\,\frac{ds}{dt} + \vec{u}\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= \frac{d\vec{u}}{ds}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{ds}{dt} + \vec{u}\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= \vec{u}'(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{u}(s)\,\frac{d^2s}{dt^2};$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \vec{u}(s)\,\frac{ds}{dt} \times \left[\vec{u}'(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{u}(s)\,\frac{d^2s}{dt^2}\right]$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 [\vec{u}(s) \times \vec{u}'(s)] + \left(\frac{ds}{dt}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right)[\vec{u}(s) \times \vec{u}(s)]$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 [\vec{u}(s) \times \vec{u}'(s)];$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|^3 |\vec{u}(s) \times \vec{u}'(s)|;$$

Como $\dfrac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$, vem

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = |\vec{r}'(t)|^3\,|\vec{u}(s) \times \vec{u}'(s)|$$

$$= |\vec{r}'(t)|^3\,|\vec{u}(s)|\,|\vec{u}'(s)|\,\operatorname{sen}\theta,$$

onde θ é o ângulo formado por $\vec{u}(s)$ e $\vec{u}'(s)$.

Como $|\vec{u}(s)| = 1$, $|\vec{u}'(s)| = k$ e $\vec{u}'(s)$ é ortogonal a $\vec{u}(s)$ (ver Proposição 2.11.2), segue que

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}.$$

2.12.3 Exemplos

(i) Calcular a curvatura da circunferência

$$C: \vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\operatorname{sen} t),\quad t \in [0,\ 2\pi].$$

Usando os resultados do Exemplo 2.10.6 (i), escrevemos

$$C: \vec{h}(s) = \left(a\cos\frac{s}{a},\ a\operatorname{sen}\frac{s}{a}\right),$$

onde s é o parâmetro comprimento de arco.

Temos, então

$$\vec{u}(s) = \vec{h}'(s)$$

$$= \left(-\operatorname{sen}\frac{s}{a},\ \cos\frac{s}{a}\right) \qquad \text{e}$$

$$\vec{u}'(s) = \left(-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a},\ \frac{-1}{a}\operatorname{sen}\frac{s}{a}\right).$$

Portanto, a curvatura de C é dada por

$$k(s) = |\vec{u}'(s)|$$

$$= \frac{1}{a}.$$

(ii) Encontrar a curvatura da parábola $\vec{r}(t) = (t,\ t^2)$, $-\infty < t < \infty$.

Usando a fórmula (2), temos

$$k(t) = \frac{\left|\left(\vec{i} + 2t\vec{j}\right) \times 2\vec{j}\right|}{|(1,\ 2t)|^3}$$

$$= \frac{\left|2\vec{k}\right|}{\sqrt{1 + 4t^2}^3} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}^3}$$

Podemos observar, neste resultado, que para $t = 0$, k tem seu valor máximo e que $k \to 0$ quando $|t| \to +\infty$.

2.12.4 Círculo de Curvatura

Quando $k \neq 0$ em um ponto P de uma curva C, podemos encontrar o círculo de curvatura de C em P (ver Figura 2.39).

Este círculo tem as seguintes características:

(i) Está contido no plano formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{u}'$.

(ii) Está centrado na semi-reta de origem em P, na direção do vetor $\vec{u}'$.

(iii) Tem raio $R = \frac{1}{k}$, onde k é a curvatura de C em P.

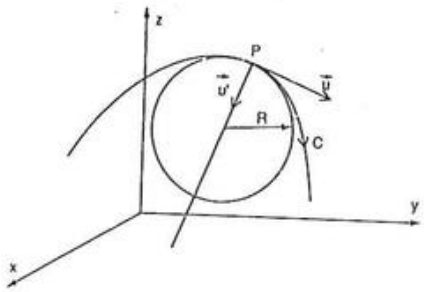


Figura 2.39

O raio R do círculo de curvatura é chamado raio de curvatura de C, em P.

Como a curvatura de uma circunferência de raio R é $\frac{1}{R}$ (ver Exemplo 2.12.3 (i)), vemos que a curvatura de C coincide com a de seu círculo de curvatura em P.

Podemos dizer que, nas proximidades de P, o círculo de curvatura é o círculo que melhor aproxima a curva.

2.12.5 Exemplos

(i) Determinar o raio e o círculo de curvatura em um ponto qualquer da circunferência

$$C: \vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\operatorname{sen} t),\quad t \in [0,\ 2\pi].$$

No Exemplo 2.12.3 (i), vimos que a curvatura em um ponto qualquer de C é $k = \frac{1}{a}$. Portanto, o raio de curvatura é $R = a$.

Para determinar o círculo de curvatura em um ponto qualquer P, basta observar que a semi-reta de origem em P, na direção de $\vec{u}'$ contém a origem, que é o centro da circunferência dada (ver Figura 2.40).

Portanto, como o raio de curvatura é $R = a$, o centro do círculo de curvatura é $(0, 0)$. Dessa forma, o círculo de curvatura coincide com a circunferência dada.

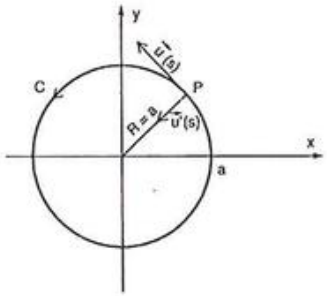


Figura 2.40

(ii) Determinar o raio e o círculo de curvatura da parábola do Exemplo 2.12.3(ii), na origem.

No Exemplo 2.12.3(ii), vimos que a curvatura da parábola é dada por

$$k(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}^3}$$

Como $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, na origem, $t = 0$. Dessa forma, o raio de curvatura é

$$R = \frac{1}{k(0)}$$

$$= \frac{1}{2/\sqrt{1 + 4.0^2}^3}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Para determinar o círculo de curvatura, devemos calcular o vetor tangente unitário $\vec{u}(t)$ e o vetor $\vec{u}'(t)$. Temos,

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$= \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1 + 4t^2}};$$

$$\vec{u}(0) = (1, 0);$$

$$\vec{u}'(t) = \left(\frac{-4t}{\sqrt{1 + 4t^2}^3}, \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}^3}\right) \text{ e}$$

$$\vec{u}'(0) = (0, 2).$$

Portanto, a semi-reta com origem em $P(0, 0)$, na direção de $\vec{u}'$ é o eixo positivo dos y. O centro do círculo de curvatura é $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

A Figura 2.41, ilustra este exemplo.

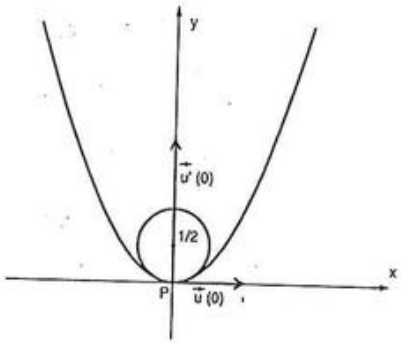


Figura 2.41

(iii) Determinar o raio e o círculo de curvatura da hélice

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, \sqrt{5}\,t) \text{ no ponto } P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}\pi}{4}\right).$$

No Exemplo 2.11.3, determinamos o vetor tangente unitário $\vec{u}$ e o vetor $\vec{u}'$ no ponto P.

Necessitamos ainda, determinar a curvatura da hélice neste ponto.

Temos,

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

$$= \frac{|(-2 \operatorname{sen} t,\ 2\cos t,\ \sqrt{5}) \times (-2\cos t,\ -2 \operatorname{sen} t,\ 0)|}{|(-2 \operatorname{sen} t,\ 2\cos t,\ \sqrt{5})|^3}$$

$$= \frac{|(2\sqrt{5} \operatorname{sen} t,\ -2\sqrt{5}\cos t,\ 4)|}{3^3}$$

$$= \frac{2}{9}.$$

Portanto, o raio de curvatura no ponto P é

$$R = \frac{1}{k}$$

$$= \frac{9}{2}.$$

O centro do círculo de curvatura está sobre a semi-reta com origem em P na direção do vetor $\vec{u}' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{-\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$.

Na Figura 2.42, esboçamos o círculo de curvatura.

2.13 VETOR NORMAL PRINCIPAL

Quando $k(s) \neq 0$, podemos definir um vetor unitário $\vec{p}(s)$, chamado vetor normal principal, como

$$\vec{p}(s) = \frac{\vec{u}'(s)}{k(s)}.$$

De acordo com a Proposição 2.11.2, o vetor normal principal $\vec{p}(s)$ é ortogonal ao vetor tangente unitário $\vec{u}(s)$ e aponta para o lado côncavo de C.

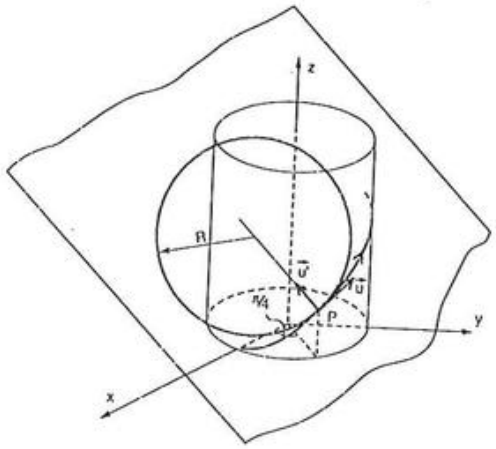


Figura 2.42

2.13.1 Exemplo

Escrever o vetor normal principal da circunferência do Exemplo 2.11.1, no ponto $P(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$.

No Exemplo 2.11.1 vimos que

$$\vec{h}(s) = \left(2\cos\frac{s}{2},\ 2 \operatorname{sen}\frac{s}{2}\right);$$

$$\vec{u}(s) = \left(-\operatorname{sen}\frac{s}{2},\ \cos\frac{s}{2}\right)$$

Temos,

$$\vec{u}'(s) = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{2},\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{s}{2}\right);$$

$$k(s) = |\vec{u}'(s)|$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\vec{p}(s) = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{2},\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{s}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$

$$= \left(-\cos\frac{s}{2},\ -\operatorname{sen}\frac{s}{2}\right).$$

No ponto $P(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$, temos

$$\vec{p}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

A Figura 2.43 ilustra este exemplo.

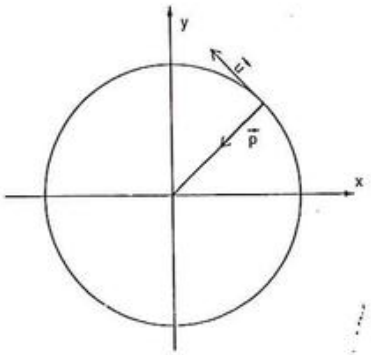


Figura 2.43

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{p}$ como foram definidos em 2.11 e 2.13, respectivamente, calculados em um ponto P da curva, definem um plano. Este plano contém o círculo de curvatura de C em P, e é chamado PLANO OSCULADOR.

A Figura 2.44 mostra o plano osculador em três pontos P_1, P_2 e P_3 de uma curva C.

Quando a curva é uma curva plana, com exceção da linha reta, o plano osculador coincide com o plano da curva.

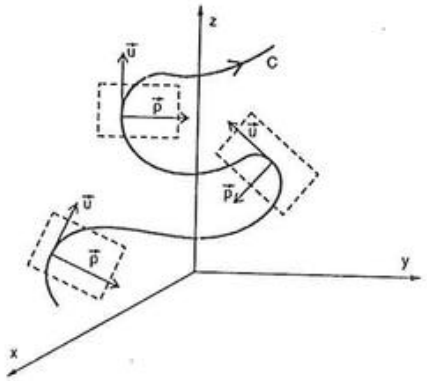


Figura 2.44

2.14 VETOR BINORMAL

O vetor binormal, denotado por $\vec{b}(s)$, é definido como o vetor unitário, normal ao plano osculador que é dado por

$$\vec{b}(s) = \vec{u}(s) \times \vec{p}(s).$$

Os três vetores $\vec{u}$, $\vec{p}$ e $\vec{b}$ determinam um sistema de coordenadas que se move sobre a curva C. O triedro determinado por estes vetores é chamado triedro de Frenet da curva C.

A Figura 2.45 mostra este triedro em um ponto P de uma curva C.

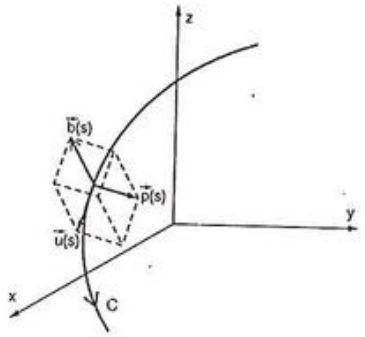


Figura 2.45

2.14.1 Exemplos

(i) Determinar o vetor binormal da circunferência do Exemplo 2.13.1 em um ponto qualquer P.

Do Exemplo 2.13.1, temos que

$$\vec{u}(s) = \left(-\operatorname{sen}\frac{s}{2},\ \cos\frac{s}{2}\right);$$

$$\vec{p}(s) = \left(-\cos\frac{s}{2},\ -\operatorname{sen}\frac{s}{2}\right).$$

Portanto,

$$\vec{b}(s) = \vec{u}(s) \times \vec{p}(s)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen}\frac{s}{2} & \cos\frac{s}{2} & 0 \\ -\cos\frac{s}{2} & -\operatorname{sen}\frac{s}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\operatorname{sen}^2\frac{s}{2} + \cos^2\frac{s}{2}\right)\vec{k}$$

$$= \vec{k}.$$

Na Figura 2.46, representamos o vetor binormal em alguns pontos de C.

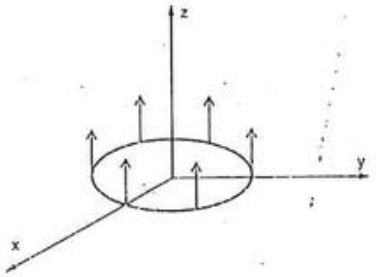


Figura 2.46

(ii) Determinar o vetor binormal da hélice circular

$$C:\ \vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\operatorname{sen} t,\ bt), \quad t \geq 0, \quad a,\ b > 0,$$

em um ponto qualquer.

Temos que a função comprimento de arco de C é

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, dt^* = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$$

Portanto, $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Chamando $\sqrt{a^2 + b^2} = \omega$, temos $t = \dfrac{s}{\omega}$.

Logo,

$$\vec{h}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\omega},\ a\operatorname{sen}\frac{s}{\omega},\ b\frac{s}{\omega}\right).$$

O vetor tangente unitário é

$$\vec{u}(s) = \vec{h}'(s)$$

$$= \left(-\frac{a}{\omega}\operatorname{sen}\frac{s}{\omega},\ \frac{a}{\omega}\cos\frac{s}{\omega},\ \frac{b}{\omega}\right)$$

A curvatura é

$$k(s) = |\vec{u}'(s)|$$

$$= \left|\left(-\frac{a}{\omega^2}\cos\frac{s}{\omega},\ \frac{-a}{\omega^2}\operatorname{sen}\frac{s}{\omega},\ 0\right)\right|$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\omega^4}}$$

$$= \frac{a}{\omega^2}.$$

O vetor normal principal é

$$\vec{p}(s) = \frac{\vec{u}'(s)}{k(s)}$$

$$= \frac{\left(-\frac{a}{\omega^2}\cos\frac{s}{\omega}, \frac{-a}{\omega^2}\operatorname{sen}\frac{s}{\omega}, 0\right)}{\frac{a}{\omega^2}}$$

$$= \left(-\cos\frac{s}{\omega}, -\operatorname{sen}\frac{s}{\omega}, 0\right)$$

Portanto, o vetor binormal é dado por

$$\vec{b}(s) = \vec{u}(s) \times \vec{p}(s)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{a}{\omega}\operatorname{sen}\frac{s}{\omega} & \frac{a}{\omega}\cos\frac{s}{\omega} & \frac{b}{\omega} \\ -\cos\frac{s}{\omega} & -\operatorname{sen}\frac{s}{\omega} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b}{\omega}\operatorname{sen}\frac{s}{\omega}\vec{i} - \frac{b}{\omega}\cos\frac{s}{\omega}\vec{j} + \frac{a}{\omega}\vec{k}.$$

Vamos ilustrar este exemplo para

$\vec{r}(t) = \left(2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\sqrt{3}\,t\right)$, nos pontos $P_1 = \left(0,\ 2,\ \sqrt{3}\pi\right)$ e $P_2 = \left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)$.

No ponto $P_1\left(0,\ 2,\ \sqrt{3}\pi\right)$, temos $t = \frac{\pi}{2}$ e $s = 2\pi$. Assim,

$$\vec{u}(2\pi) = \left(-\frac{2}{4}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}, \frac{2}{4}\cos\frac{2\pi}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$k(2\pi) = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8};$$

$$\vec{p}(2\pi) = (0, -1, 0) \text{ e}$$

$$\vec{b}(2\pi) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

No ponto $P_2\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)$, temos $t = \frac{\pi}{4}$ e $s = \pi$. Assim,

$$\vec{u}(\pi) = \left(-\frac{2}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, \frac{2}{4}\cos\frac{\pi}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$k(\pi) = \frac{2}{4^2}$$

$$= \frac{1}{8}.$$

$$\vec{p}(\pi) = \left(-\cos\frac{\pi}{4}, -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

$$\vec{b}(\pi) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{-\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Estes vetores podem ser vistos na Figura 2.47.

2.15 TORÇÃO

Nas seções anteriores, vimos que os vetores tangente unitário $\vec{u}$ e normal principal $\vec{p}$ determinam um plano, chamado plano osculador e que o vetor binormal é ortogonal a este plano. Se a curva é plana, o plano osculador é o mesmo em todos os pontos da curva e o vetor binormal é constante (ver Exemplo 2.14.1(i)). No caso de uma curva reversa, ao deslocar-se sobre a curva, o plano osculador se altera, mudando a direção do vetor binormal (ver Exemplo 2.14.1(ii)). Veremos que, a menos de sinal, a torção exprimirá a taxa de variação do vetor binormal.

(i)

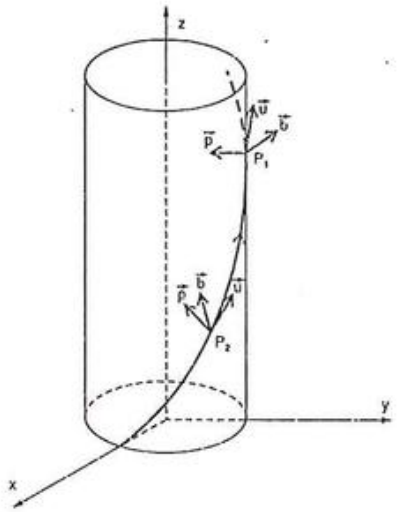


Figura 2.47

2.15.1 Proposição

Se o vetor $\vec{b}'(s)$ é diferente de zero, então ele é ortogonal ao vetor $\vec{b}(s)$.

A demonstração desta Proposição é análoga à da Proposição 2.11.2.

2.15.2 Proposição

Se $\vec{b}'(s)$ é diferente de zero, então ele é ortogonal ao vetor tangente unitário $\vec{u}(s)$.

Prova. Sabemos que $\vec{b}(s)$ é ortogonal à $\vec{u}(s)$.

Portanto,

$$\vec{b} \cdot \vec{u} = 0$$

Derivando, vem

$$\vec{b}' \cdot \vec{u} + \vec{b} \cdot \vec{u}' = 0. \qquad (1)$$

Como $\vec{b}$ é ortogonal à $\vec{p}$, temos

$$\vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\vec{b} \cdot (k\,\vec{u}') = 0, \text{ ou ainda,}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{u}' = 0.$$

Substituindo este resultado em (1), segue que

$$\vec{b}' \cdot \vec{u} = 0.$$

Portanto, $\vec{b}'(s)$ é ortogonal à $\vec{u}(s)$.

Em conseqüência das proposições anteriores, podemos escrever

$$\vec{b}'(s) = \alpha\vec{p}(s), \qquad (2)$$

onde α é um escalar.

Se em (2) fazemos $\alpha = -T$, obtemos

$$\vec{b}'(s) = -T\,\vec{p}(s). \qquad (3)$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{p}(s)$, vem

$$\vec{b}'(s) \cdot \vec{p}(s) = -T\,\vec{p}(s) \cdot \vec{p}(s)$$

ou

$$T = -\vec{b}'(s) \cdot \vec{p}(s). \qquad (4)$$

A função escalar T, assim definida, é chamada TORÇÃO da curva C.

Como $|\vec{p}(s)| = 1$, usando (3), obtemos

$$|\vec{b}'(s)| = |-T\,\vec{p}(s)|$$

$$= |T|$$

$$= \pm T,$$

ou ainda,

$$T = \pm|\vec{b}'(s)|$$

Assim, a menos de sinal, a torção é a taxa de variação do vetor binormal.

Intuitivamente, podemos sentir a torção quando subimos uma escala helicoidal.

Também podemos observá-la quando torcemos uma mangueira. Sob o efeito da torção, a mangueira assume a forma de uma hélice.

2.15.3 Exemplo

Encontrar a torção da hélice do Exemplo 2.14.1(ii), nos pontos onde $t = \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, considerando $a = 2$ e $b = 2\sqrt{3}$.

No Exemplo 2.14.1(ii), obtivemos

$$\vec{p}(s) = \left(-\cos\frac{s}{\omega},\ -\operatorname{sen}\frac{s}{\omega},\ 0\right)$$

e

$$\vec{b}(s) = \left(\frac{b}{\omega}\operatorname{sen}\frac{s}{\omega},\ \frac{-b}{\omega}\cos\frac{s}{\omega},\ \frac{a}{\omega}\right),$$

onde $\omega = \sqrt{a^2 + b^2}$. Temos então,

$$\vec{b}'(s) = \left(\frac{b}{\omega^2}\cos\frac{s}{\omega},\ \frac{b}{\omega^2}\operatorname{sen}\frac{s}{\omega},\ 0\right)$$

e portanto, usando (4), temos

$$\begin{aligned} T(s) &= -\left(-\cos\frac{s}{\omega},\ -\operatorname{sen}\frac{s}{\omega},\ 0\right)\cdot\left(\frac{b}{\omega^2}\cos\frac{s}{\omega},\ \frac{b}{\omega^2}\operatorname{sen}\frac{s}{\omega},\ 0\right) \\ &= -\left(-\frac{b}{\omega^2}\cos^2\frac{s}{\omega} - \frac{b}{\omega^2}\operatorname{sen}^2\frac{s}{\omega}\right) \\ &= \frac{b}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Substituindo os correspondentes valores de a e b, obtemos

$$T(s) = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Nos pontos onde $t = \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ a torção é $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Observamos que o resultado encontrado justifica o sinal negativo introduzido na definição de torção. Dessa forma, curvas que lembram parafusos com rosca à direita, têm torção positiva.

Também é interessante observar que, neste exemplo, a expressão (3) torna-se

$$\vec{b}'(s) = -\frac{\sqrt{3}}{8}\vec{p}(s).$$

Como o vetor $\vec{p}(s)$ aponta para o centro da hélice, podemos dizer que o vetor $\vec{b}'$ "pende sempre para fora" à medida que se move sobre a hélice. Esta afirmação é confirmada na prática quando sentimos a torção ao subir uma escada helicoidal.

2.16 APLICAÇÕES

2.16.1 Componentes tangencial e normal da aceleração

Na Física, discutimos o movimento de uma partícula P em função de sua velocidade instantânea $\frac{ds}{dt}$, de sua aceleração $\frac{d^2s}{dt^2}$ ao longo da trajetória bem como da curvatura da mesma.

Para isso, fazemos uma relação entre os vetores velocidade e aceleração e os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{p}$.

Seja $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ a função que descreve o movimento de uma partícula P.

Em 1.9.5, vimos que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1}$$

Usando a regra da cadeia, podemos reescrever (1) como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

ou

$$\vec{v} = \vec{u}(s)\,\frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Portanto, a velocidade escalar v é dada por

$$v = |\vec{v}| = \left|\vec{u}(s)\ \frac{ds}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}, \tag{3}$$

desde que $\frac{ds}{dt} \geq 0$.

Derivando (2) em relação à t, obtemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}(s)\ \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{u}(s)}{dt}\ \frac{ds}{dt}$$

$$= \vec{u}(s)\ \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{u}}{ds}\ \frac{ds}{dt}\ \frac{ds}{dt}.$$

Como visto em 2.13, $\frac{d\vec{u}}{ds} = k(s)\,\vec{p}(s)$. Portanto,

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\vec{u}(s) + k(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{p}(s). \tag{4}$$

A equação (4) é muito utilizada na Mecânica. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{p}$ são utilizados como vetores unitários de referência, tais como $\vec{i}$ e $\vec{j}$. As componentes de $\vec{a}$ em (4) são chamadas de tangencial e normal, respectivamente. Dessa forma, a aceleração pode ser expressa em função de suas componentes:

$$\text{tangencial: } a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \tag{5}$$

e

$$\text{normal: } a_n = k(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k(s)\ v^2 \tag{6}$$

2.16.2 Exemplo

Uma partícula se move ao longo da curva C dada por

$$\vec{r}(t) = e^t \cos t\ \vec{i} + e^t \operatorname{sen} t\ \vec{j}.$$

Determinar: (i) os vetores velocidade e aceleração;

(ii) a velocidade escalar;

(iii) as componentes tangencial e normal da aceleração.

Solução.

(i) Temos,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(-e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t,\ e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t\right)$$

e

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t - e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t,\right.$$

$$\left. - e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t + e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t\right)$$

$$= \left(-2e^t \operatorname{sen} t,\ 2e^t \cos t\right).$$

(ii) $v = \frac{ds}{dt} = |\vec{v}| = \sqrt{\left(-e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t\right)^2 + \left(e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t\right)^2}$

$$= \sqrt{2\,e^{2t}}$$

$$= e^t\,\sqrt{2}.$$

(iii) A componente tangencial é

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(e^t\sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,e^t.$$

A componente normal pode ser calculada utilizando (6), onde deveríamos primeiro calcular o valor de $k(s)$.

No entanto, vamos calcular como segue, por ser mais simples.

Podemos escrever,

$$\vec{a} = a_t\,\vec{u} + a_n\,\vec{p}$$

e

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

ou

$$|\vec{a}|^2 = a_t^2 + a_n^2.$$

Logo, $a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2}$

$$= \sqrt{\left|(-2e^t \operatorname{sen} t,\ 2e^t \cos t)\right|^2 - \left(\sqrt{2}\,e^t\right)^2}$$

$$= \sqrt{4e^{2t}\operatorname{sen}^2 t + 4e^{2t}\cos^2 t - 2e^{2t}}$$

$$= \sqrt{2}\,e^t.$$

2.16.3 Fórmulas de Frenet – Teorema Fundamental das Curvas

Na Geometria Diferencial, os conceitos de curvatura e torção são muito importantes para um estudo mais aprofundado das curvas.

As Fórmulas de Frenet permitem caracterizar diversos tipos de curvas pelas propriedade de sua curvatura e torção. Por exemplo, quando a curvatura é nula, temos uma reta, e quando a torção é nula, temos uma curva plana.

O Teorema Fundamental das curvas mostra que, quando $k \neq 0$, a curvatura e a torção descrevem geometricamente a curva, exceto por sua posição no espaço.

A seguir apresentamos as Fórmulas de Frenet e enunciamos o Teorema Fundamental das Curvas.

Fórmulas de Frenet:

$$\vec{u}' = k\vec{p} \tag{7}$$

$$\vec{p}' = -k\vec{u} + T\vec{b} \tag{8}$$

$$\vec{b}' = -T\vec{p} \tag{9}$$

A fórmula (7) é obtida da definição do vetor normal principal (ver 2.13).

A fórmula (9) pode ser encontrada em 2.15 (3).

Vamos verificar a fórmula (8):

$$\vec{p}' = -k\vec{u} + T\vec{b}.$$

Podemos representar o vetor $\vec{p}'$ como uma combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{p}$ e $\vec{b}$. Temos,

$$\vec{p}' = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{p} + \alpha_3\vec{b}. \tag{10}$$

Multiplicando escalarmente (10) por $\vec{b}$, vem

$$\vec{p}' \cdot \vec{b} = \alpha_1\vec{u} \cdot \vec{b} + \alpha_2\vec{p} \cdot \vec{b} + \alpha_3\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \alpha_1.0 + \alpha_2.0 + \alpha_3.1$$

$$= \alpha_3. \tag{11}$$

Lembrando que $\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$, vem $\vec{b} \cdot \vec{p}' = -\vec{p} \cdot \vec{b}'$, e reescrevemos (11) como

$$-\vec{p} \cdot \vec{b}' = \alpha_3.$$

Da definição de torção (ver 2.15(4)) vem

$$\alpha_3 = T.$$

Multiplicando escalarmente (10) por $\vec{u}$ obtemos

$$\vec{p}' \cdot \vec{u} = \alpha_1\vec{u} \cdot \vec{u} + \alpha_2\vec{p} \cdot \vec{u} + \alpha_3\vec{b} \cdot \vec{u}$$

$$= \alpha_1.1 + \alpha_2.0 + \alpha_3.0$$

$$= \alpha_1. \tag{13}$$

Como $\vec{p}' \cdot \vec{u} = -\vec{u}' \cdot \vec{p}$, reescrevemos (13) como

$$-\vec{u}' \cdot \vec{p} = \alpha_1.$$

Da definição de curvatura temos

$$-k = \alpha_1.$$

Analogamente, encontramos $\alpha_2 = 0$.

Substituindo os valores de α_1, α_2 e α_3 na expressão (10), obtemos

$$\vec{p}' = -k\vec{u} + T\vec{b}.$$

Teorema Fundamental das Curvas. Toda curva suave C, com curvatura $k > 0$, é completamente determinada, a menos de posição, por sua curvatura e torção.

2.17 EXERCÍCIOS

1. Determinar o comprimento de arco das seguintes curvas:

   a) $\vec{r}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t),\ 0 \le t \le 1$

   b) $\vec{r}(t) = (2t^3,\ 2t,\ \sqrt{6}\,t^2),\ 0 \le t \le 3$

   c) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + (1 + \cos t)\,\vec{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

   d) $y = x^{3/2},\ z = 0$ de $P_0(0,\ 0,\ 0)$ a $P_1(4,\ 8,\ 0)$

   e) $x = t^3,\ y = t^2,\ 1 \le t \le 3$

   f) hélice circular $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 4t,\ 2\operatorname{sen} t)$ de $P_0(2,\ 0,\ 0)$ a $P_1(0,\ 2\pi,\ 2)$

   g) um arco da ciclóide $\vec{r}(t) = 2(t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j}$

   h) $\vec{r}(t) = (-\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 2)$ para $t \in [0,\ 2\pi]$

   i) $\vec{r}(t) = (t \operatorname{sen} t,\ t \cos t)$ para $t \in [0,\ \pi]$

   j) $\vec{r}(t) = (3t + 1)\vec{i} + (t + 2)\vec{j}$ para $t \in [0,\ 2]$

   k) $\vec{r}(t) = (e^t,\ e^{-t},\ t\sqrt{2}),\ t \in [0,\ 1]$.

2. Escrever a função comprimento de arco de:

   a) $\vec{r}(t) = \left(\operatorname{sen}\frac{t}{2},\ \cos\frac{t}{2},\ 2t\right)$

   b) $\vec{r}(t) = (\cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t,\ 4)$

   c) $\vec{r}(t) = (t,\ t^2)$

   d) $\vec{r}(t) = \left(\cos^3 t,\ \operatorname{sen}^3 t,\ \frac{3}{4}\cos 2t\right)$

   e) $\vec{r}(t) = (\cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t),\ t \in [0,\ \pi]$

   f) hipociclóide $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t,\ a\operatorname{sen}^3 t),\ t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

3. Reparametrizar pelo comprimento de arco as seguintes curvas:

   a) $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\operatorname{sen} t),\ t \in [0,\ 2\pi]$

   b) $\vec{r}(t) = (3t - 1,\ t + 2)$

   c) $\vec{r}(t) = (\cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t,\ 2t)$

   d) $\vec{r}(t) = \left(2t,\ \frac{2}{3}\sqrt{8t^3},\ t^2\right),\ t \in [0,\ 3]$

   e) $\vec{r}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t)$

   f) $\vec{r}(t) = (\cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t),\ t \in [0,\ \pi]$

   g) hipociclóide $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t,\ a\operatorname{sen}^3 t),\ t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

   h) hélice circular $x = 2\cos t,\ y = 4t,\ z = 2\operatorname{sen} t,\ t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

   i) $x = 1 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3t,\ t \in [0,\ 1]$.

4. Verificar se as curvas dadas estão parametrizadas pelo comprimento de arco:

   a) $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t,\ \cos t),\ t \ge 0$

   b) $\vec{r}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{7}},\ \sqrt{\frac{6}{7}}s\right),\ s \ge 0$

   c) $\vec{r}(t) = (2t - 1,\ t + 2,\ t),\ t \ge 0$

d) $\vec{q}(s) = \left(a\ \cos\frac{s}{c},\ a\ \text{sen}\ \frac{s}{c},\ b\ \frac{s}{c}\right)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$

e) $\vec{h}(s) = (2\cos s,\ 2\ \text{sen}\ s),\ s \in [0,\ 2\pi]$

f) $\vec{r}(s) = \left(4\cos\frac{s}{4},\ 4\text{sen}\ \frac{s}{4}\right),\ s \in [0,\ 8\pi]$

g) $\vec{r}(s) = \ln(s+1)\vec{i} + \left(\frac{s^3}{3} + s^2\right)\vec{j},\ s \geq 0$

h) $\vec{h}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right),\ s \geq 0.$

5. Encontrar o vetor tangente unitário às seguintes curvas, nos pontos indicados:

a) $\vec{r}(t) = (t\cos 2t,\ t\,\text{sen}2t).\ t \in [0,\ \infty);\ t = \frac{\pi}{2}$

b) $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 3\,\text{sen}t),\ t \in [0,\ 2\pi];\ t = \frac{\pi}{4}$

c) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j},\ t \in [0,\ 4];\ P_0(2,\ 5)$

d) $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\,\text{sen}t,\ 2 - 2\,\text{sen}t);\ P_0(0,\ 2,\ 0)$

e) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\,\text{sen}t\right);\ P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

f) $\vec{r}(t) = (e^t\cos t,\ e^t\,\text{sen}t,\ 2);\ P_0(1,\ 0,\ 2)$

g) $\vec{r}(t) = (t,\ 2t^2,\ 3t^3);\ P_0(1,\ 2,\ 3)$

h) $\vec{r}(t) = (e^t + 1,\ e^{-t} - 1,\ t);\ P_0(2,\ 0,\ 0).$

6. Dada a curva $\vec{r}(t) = (2 + 2\cos t)\vec{i} + (-1 + 2\,\text{sen}t)\vec{j}$, representar geometricamente o vetor tangente unitário $\vec{u}(t)$ e o vetor $\vec{u}'(t)$ no ponto $P(2 + \sqrt{3},\ 0)$.

7. Calcular a curvatura da circunferência de raio $\sqrt{2}$ centrada na origem.

8. Calcular a curvatura da circunferência de raio 4 centrada em (2, 3).

9. Determinar a curvatura das seguintes curvas, nos pontos indicados.

a) $\vec{r}(t) = \left(t,\ \frac{1}{1+t}\right),\ t > 0;\ P_0\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$

b) $\vec{r}(t) = (t + 2,\ t + 3,\ 2t - 4),\ -\infty < t < \infty;\ P_0(3,\ 4,\ -2)$

c) $x = \frac{1}{1+t},\ y = \frac{1}{1-t},\ t \in (1,\ +\infty);\ t = 2$

d) $\vec{r}(s) = \ln(s+1)\vec{i} + \left(\frac{s^3}{3} + s^2\right)\vec{j},\ s \geq 0;\ P_0\left(\ln 2,\ \frac{4}{3}\right)$

e) $y = 1 - x^2;\ P_0(0,\ 1);\ P_1(1,\ 0)$ e $P_2(3,\ -8)$

f) $xy = 12,\ x > 0;\ P_0(3,\ 4)$

g) $x = 4\cos\frac{s}{4},\ y = 4\,\text{sen}\,\frac{s}{4},\ s \in [0,\ 8\pi];\ s = \pi$

h) $\vec{h}(s) = (2\cos s,\ 2\,\text{sen}\,s),\ s \in [0,\ 2\pi];\ P_0(2,\ 0).$

10. Calcular a curvatura das seguintes parábolas:

a) $\vec{r}(t) = (2t,\ 4t^2);\ \ -\infty < t < +\infty$

b) $\vec{r}(t) = (t,\ t^2 + 1),\ \ -\infty < t < +\infty.$

11. Mostrar que a curvatura da catenária $\vec{r}(t) = (t,\ \cosh t),\ -\infty < t < +\infty$ é dada por $k(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}$.

12. Determinar o círculo de curvatura das seguintes curvas, nos pontos indicados, representando-os geometricamente:

a) $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\,\text{sen}t,\ 2\cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi;\ P_0(2,\ 0,\ 2)$

b) hélice $\vec{r}(t) = (3\cos t,\ 3\,\text{sen}t,\ -3t);\ t = \frac{\pi}{3}$

c) $y = \text{sen}x;\ P_0\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$

d) $y = 2x^2 - 1$, no seu vértice.

13. Determinar os pontos da curva onde o raio de curvatura é menor:

a) $y = \ln x,\ x > 0$

b) $\vec{r}(t) = (t,\ e^t)$

c) ciclóide $\vec{r}(t) = (t - \text{sen}t,\ 1 - \cos t),\ t \in [0,\ 2\pi]$.

14. Representar geometricamente o círculo de curvatura da elipse

$x = 3\cos t,\ y = 5\,\text{sen}t,\ 0 \le t \le 2\pi$ em $t = \dfrac{\pi}{2}$.

15. Mostrar que a curvatura de uma reta é nula.

16. Escrever o vetor normal principal das seguintes curvas no ponto dado:

a) $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\,\text{sen}t,\ 4)$; $P_0(1,\ 1,\ 4)$

b) $\vec{r}(s) = \left(4\cos\dfrac{s}{4},\ 4\,\text{sen}\dfrac{s}{4}\right)$, $s \in [0,\ 8\pi]$; $P_0\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

c) $\vec{r}(t) = (4\cos t,\ 4\,\text{sen}t,\ t)$; $t = \dfrac{\pi}{2}$.

17. Determinar uma equação para o plano osculador da hélice

$$\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\,\text{sen}t,\ 4t)$$

nos pontos $P_0(2,\ 0,\ 0)$, $P_1(2,\ 0,\ 8\pi)$ e $P_2(0,\ 2,\ 2\pi)$.

18. Determinar o vetor binormal das seguintes curvas, nos pontos indicados:

a) $\vec{r}(s) = \left(4\cos\dfrac{s}{4},\ 4\,\text{sen}\dfrac{s}{4}\right)$, $s \in [0,\ 8\pi]$; $P_0(4,\ 0)$; $P_1\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

b) $\vec{r}(t) = (3\cos t,\ 3\,\text{sen}t)$, $P_0(3,\ 0)$

c) $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\,\text{sen}t,\ t)$ em $t = \dfrac{\pi}{2}$

d) $\vec{r}(t) = (2\cos 2t,\ 3,\ 2\,\text{sen}2t)$ em $t = \dfrac{\pi}{8}$

e) $\vec{r}(t) = (2t,\ \cos t,\ \text{sen}t)$; $P_0(2\pi,\ -1,\ 0)$.

19. Determinar a torção das curvas do exercício 18, nos pontos indicados.

20. Determinar a torção em um ponto qualquer da curva:

a) $x = 1 + 2\cos t,\ y = -2t,\ z = 2 + 2\,\text{sen}t$

b) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\,\text{sen}t,\ 4t)$

c) $\vec{r}(t) = (3\cos t,\ 3\,\text{sen}t,\ -5t)$.

21. Uma partícula move-se no plano de modo que, no instante t, sua posição é dada por

$$\vec{r}(t) = \left(2\cos\frac{t}{2},\ 2\,\text{sen}\frac{t}{2}\right).$$

a) Calcular o vetor $\vec{u}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$ onde $\vec{v}(t)$ é o vetor velocidade da partícula no instante t.

b) Mostrar que $\vec{u}(t)$ e $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ são ortogonais.

c) Calcular o raio de curvatura ρ da trajetória.

d) Mostrar que $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\cdot\vec{u} + \dfrac{v^2}{\rho}\cdot\vec{n}$ onde $\vec{n} = \dfrac{\dfrac{d\vec{u}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|}$, v é a velocidade escalar e $\vec{a}$ é a aceleração da partícula.

22. Uma partícula se move ao longo da curva C, dada por $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + \vec{k}$. Determinar:

a) os vetores velocidade e aceleração

b) a velocidade escalar

c) as componentes tangencial e normal da aceleração.

23. Determinar as componentes tangencial e normal da aceleração de uma partícula que se move no espaço, se seu vetor posição em um instante qualquer t, for dado por:

a) $\vec{r}(t) = (5t,\ 2t^2 - 1)$

b) $\vec{r}(t) = (e^t\cos t,\ e^t\,\text{sen}t,\ e^t)$

c) $\vec{r}(t) = (\cos t,\ \text{sen}t,\ 1)$

d) $\vec{r}(t) = (4t,\ t^2,\ 2t^2)$

e) $\vec{r}(t) = (3t,\ t^3,\ t)$.

24. Provar que, se uma partícula move-se ao longo de uma curva C com velocidade constante, então a aceleração é sempre normal à curva C.

25. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = x^2 - 1$, $x \geq -3$ de modo que a componente horizontal da velocidade é sempre 2. Determinar as componentes tangencial e normal da aceleração, ilustrando geometricamente.

Snow666

MAKRON Books

Capítulo 3

FUNÇÕES VETORIAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Neste capítulo, estenderemos os conceitos do Cálculo para as funções vetoriais de várias variáveis. Inicialmente, introduziremos alguns conceitos que serão utilizados no decorrer deste e dos próximos capítulos.

3.1 DEFINIÇÃO

Dados $P_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0) \in \mathbb{R}^3$ e um número positivo r, a bola aberta $B(P_0, r)$, de centro em P_0 e raio r, é definida como o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$, cuja distância até P_0 é menor que r, isto é, os pontos $P(x, y, z)$ que satisfazem $|P - P_0| < r$.

Analogamente, definimos a bola aberta em $\mathbb{R}^2$.

Geometricamente, em $\mathbb{R}^3$, $B(P_0, r)$ é o interior de uma esfera e em $\mathbb{R}^2$ é o interior de um disco centrado em P_0 (ver Figura 3.1).

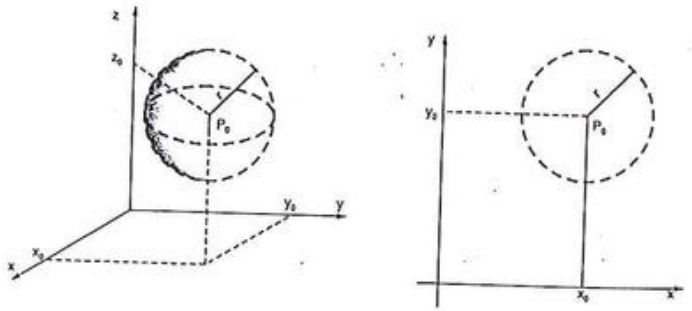


Figura 3.1

3.2 DEFINIÇÃO

Dados $P_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0) \in \mathbb{R}^3$ e um número positivo r, a bola fechada $B\ [P_0, r]$, de centro em P_0 e raio r, é definida como o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$, que satisfazem $|P - P_0| \leq r$ (ver Figura 3.2 (a)).

Analogamente, definimos a bola fechada em $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 3.2 (b)).

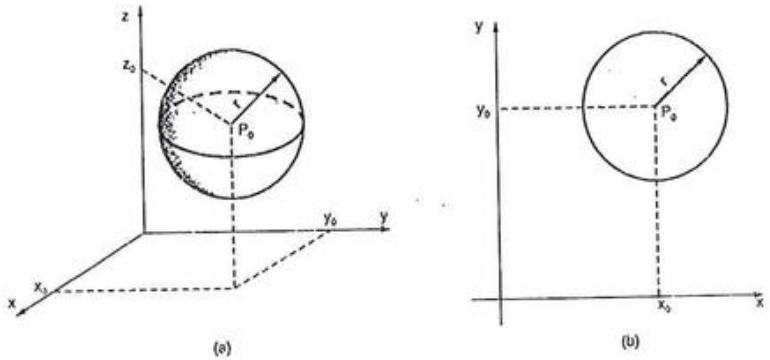


Figura 3.2

3.3 EXEMPLOS

(i) O conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que $(x-2)^2 + (y-4)^2 \leq 16$ é a bola fechada $B\ [P_0, 4]$, onde $P_0\ (2, 4)$ (ver Figura 3.3).

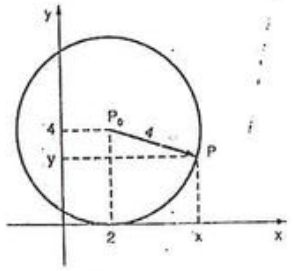


Figura 3.3

(ii) O conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ tais que $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 < 1$ é a bola aberta $B(P_0, 1)$ onde $P_0(1, 2, 2)$ (ver Figura 3.4).

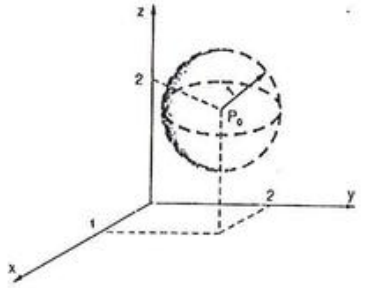


Figura 3.4

3.4 DEFINIÇÃO

Seja A um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Dizemos que A é aberto, se para cada ponto $P_0 \in A$, existe uma bola aberta $B(P_0, r)$ totalmente contida em A (ver Figura 3.5).

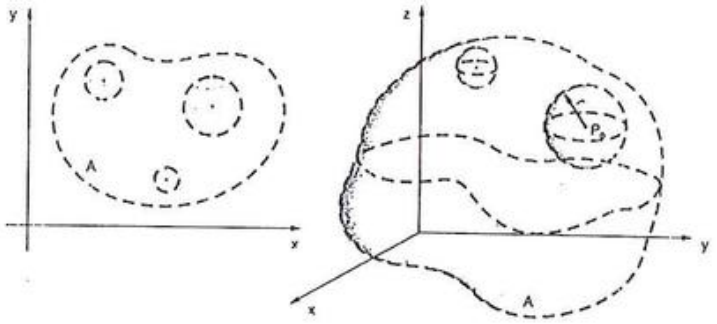


Figura 3.5

Observamos que, no estudo das funções vetoriais, um conjunto aberto no plano ou no espaço será denominado um domínio.

3.5 EXEMPLOS

(i) Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto dos pontos interiores a uma curva fechada simples é um conjunto aberto.

(ii) O conjunto dos pontos interiores de um paralelepípedo, é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^3$.

(iii) $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são conjuntos abertos.

3.6 DOMÍNIOS CONEXOS

Um domínio D de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ é dito conexo, se dados dois pontos quaisquer em D, eles podem ser ligados por uma linha poligonal contida em D.

A Figura 3.6 mostra exemplos de conjuntos conexos no plano. Podemos ver que, dados dois pontos no domínio D, sempre é possível ligá-los por meio de uma linha poligonal contida em D.

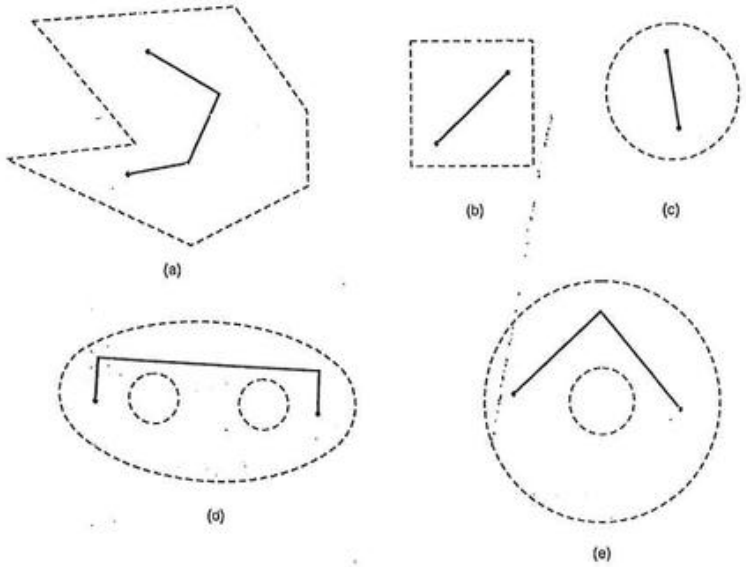


Figura 3.6

Na Figura 3.7, representamos alguns domínios conexos em $\mathbb{R}^3$.

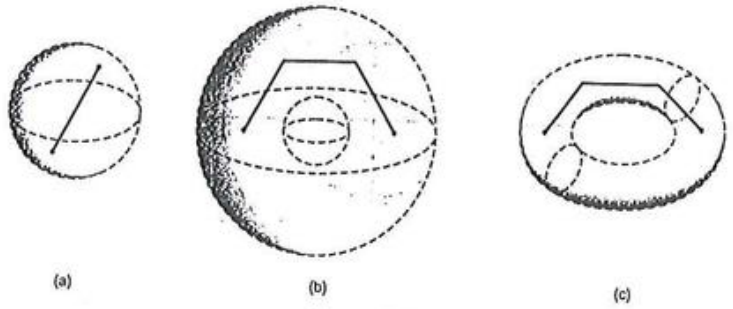


Figura 3.7

Observando a Figura 3.6, vemos que um domínio conexo em $\mathbb{R}^2$ pode apresentar "buracos".

Quando um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ não apresenta buracos, isto é, quando toda curva fechada simples C de D, circunda somente pontos de D, D é dito simplesmente conexo.

Assim, podemos dizer que os domínios representados em (a), (b) e (c) da Figura 3.6 são simplesmente conexos, enquanto que os domínios representados em (d) e (e) não são simplesmente conexos.

Se D é um domínio em $\mathbb{R}^3$, dizemos que D é simplesmente conexo quando qualquer curva fechada simples em D pode ser reduzida de maneira contínua a um ponto qualquer de D sem sair de D.

Os domínios representados em (a) e (b) da Figura 3.7 são simplesmente conexos. O domínio representado na Figura 3.7 (c) não é simplesmente conexo.

3.7 EXEMPLOS E CONTRA-EXEMPLOS

(i) $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são simplesmente conexos.

(ii) Em $\mathbb{R}^2$, $D = \{(x, y) \mid 4 < x^2 + y^2 < 16\}$ é um domínio conexo que não é simplesmente conexo (ver Figura 3.8).

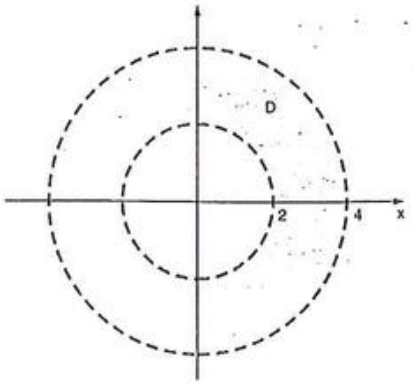


Figura 3.8

(iii) Em $\mathbb{R}^2$, $D = \{(x, y) \mid |x| > 1\}$ não é um domínio conexo (ver Figura 3.9).

(iv) O interior de uma esfera com um número finito de pontos removidos é um domínio simplesmente conexo em $\mathbb{R}^3$.

(v) O interior de um cubo com uma diagonal removida não é simplesmente conexo em $\mathbb{R}^3$.

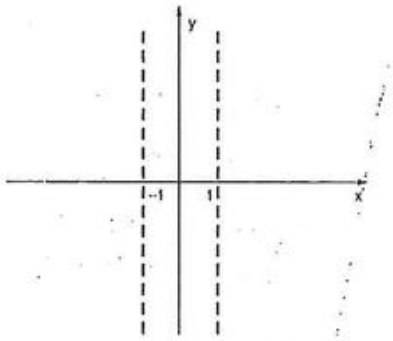


Figura 3.9

3.8 FUNÇÕES VETORIAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Como no caso das funções vetoriais de uma variável, se $\vec{f}$ é uma função vetorial das variáveis x, y, z, definida em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$, ela pode ser expressa na forma

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k},$$

onde f_1, f_2 e f_3 são funções escalares definidas em D.

As funções escalares f_1, f_2 e f_3 são chamadas componentes da função vetorial $\vec{f}$ ou também funções coordenadas.

Analogamente, se $\vec{f}$ é definida em um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, podemos escrever:

$$\vec{f}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j} + f_3(x, y)\vec{k}.$$

3.8.1 Exemplos

(i) $\vec{f}(x, y, z) = xz\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + 2\sqrt{z}\,\vec{k}$ é uma função vetorial definida em todos os pontos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tais que $z \geq 0$. Suas funções coordenadas são dadas por

$$f_1(x, y, z) = xz,\ f_2(x, y, z) = xy \text{ e } f_3(x, y, z) = 2\sqrt{z}.$$

(ii) $\vec{f}(x, y) = x\,\vec{i} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\vec{j}$ é uma função vetorial definida em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 \leq 1$. Isto é, o domínio de $\vec{f}$ é o círculo unitário centrado na origem. As funções coordenadas são $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $f_3(x, y) = 0$.

3.9 LIMITE E CONTINUIDADE

3.9.1 Definição

Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um domínio D e $\vec{r}_0$ seu vetor posição. Seja $\vec{f}$ uma função vetorial definida em D, exceto, possivelmente, em $\vec{r}_0$. Seja $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ um vetor constante. Se $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$, dizemos que

$$\lim_{\vec{r} \to \vec{r}_0} \vec{f}(x, y, z) = \vec{a}$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\vec{f}(x, y, z) - \vec{a}| < \varepsilon$ sempre que $0 < |\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta$.

A desigualdade $0 < |\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta$ representa o interior (exceto P_0) de uma esfera de raio δ e centro em P_0. Portanto, geometricamente, podemos visualizar a Definição 3.9.1 na Figura 3.10. Dada qualquer bola $B(A, \varepsilon)$ de raio ε, centrada em $A(a_1, a_2, a_3)$, existe uma bola

$B(P_0, \delta)$ de raio δ, centrada em $P_0(x_0, y_0, z_0)$, tal que os pontos de $B(P_0, \delta)$ (exceto, possivelmente, P_0) são levados por $\vec{f}$ em pontos de $B(A, \varepsilon)$. Assim, a direção, o sentido e o comprimento de $\vec{f}(x, y, z)$ tendem para os de $\vec{a}$ quando $(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)$.

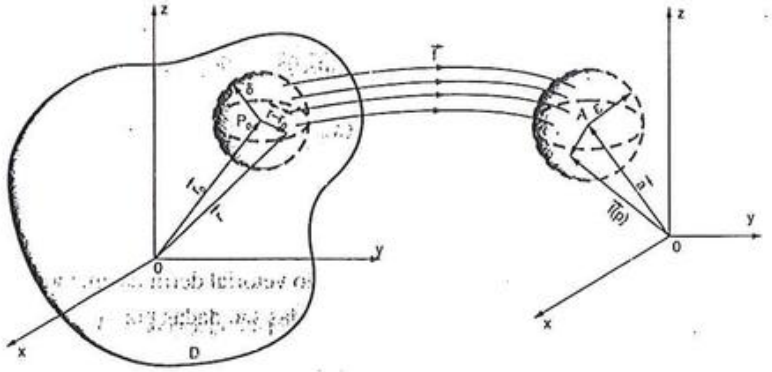


Figura 3.10

De forma análoga às funções vetoriais de uma variável, se

$$\vec{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

e

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, temos

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \vec{f}(x, y, z) = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f_i(x, y, z) = a_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Também as propriedades dos limites são análogas (ver 1.7.3).

3.9.2 Exemplos

(i) Dada a função vetorial $\vec{f}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$, determinar

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \vec{f}(x, y).$$

Temos,

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} (y\vec{i} - x\vec{j}) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} y\vec{i} - \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x\vec{j}$$

$$= \vec{0}.$$

(ii) Se $\vec{f}(x, y, z) = \left(e^{x-1}, \frac{y(x-1)}{x^2-1}, 3xz\right)$

determinar $\lim_{(x,y,z)\to(1,2,1)} \vec{f}(x, y, z)$.

Temos,

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,1)} \vec{f}(x, y, z) = \left(\lim_{(x,y,z)\to(1,2,1)} e^{x-1}, \lim_{(x,y,z)\to(1,2,1)} \frac{y(x-1)}{x^2-1}, \lim_{(x,y,z)\to(1,2,1)} 3xz\right)$$

$$= (1, 1, 3).$$

3.9.3 Definição

Seja $\vec{f}(x, y, z)$ definida em um domínio D. Dizemos que $\vec{f}$ é contínua em um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ se

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \vec{f}(x, y, z) = \vec{f}(x_0, y_0, z_0).$$

Se $\vec{f}$ é contínua em cada ponto do domínio D, dizemos que f é contínua em D.

De forma análoga às funções vetoriais de uma variável, temos que $\vec{f}$ é contínua em D se, e somente se, as três funções coordenadas f_1, f_2 e f_3 são contínuas em D.

3.9.4 Exemplos

(i) No Exemplo 3.9.2 (i) a função vetorial é contínua em todos os pontos do plano.

(ii) No Exemplo 3.9.2 (ii), a função $\vec{f}(x, y, z)$ é contínua em todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x \neq \pm 1$.

(iii) A função vetorial $\vec{f}(x, y, z) = \frac{-k\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, onde k é constante positiva e $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto (x, y, z), é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$, exceto na origem, ponto no qual a função não está definida.

3.10 DERIVADAS PARCIAIS

3.10.1 Definição

Seja $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ uma função vetorial. A derivada parcial de $\vec{f}$ em relação a x, que denotamos por $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$, é definida por

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{f}(x + \Delta x, y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta x}$$

para todo (x, y, z), tal que o limite existe.

Analogamente,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{f}(x, y + \Delta y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta y} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{f}(x, y, z + \Delta z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta z}.$$

Se $\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$, de maneira análoga à derivada de função vetorial de 1 variável, temos

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial x}\vec{k};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\vec{k} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\vec{k}.$$

3.10.2 Exemplos

(i) Dada a função vetorial $\vec{f}(x, y, z) = \sqrt{x}\,\vec{i} + xyz^2\vec{j} + 4e^{xz}\vec{k}$, determinar suas derivadas parciais.

Temos,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\vec{i} + yz^2\vec{j};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = xz^2\vec{j} + 4ze^{xz}\vec{k};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = 2xyz\vec{j} + 4ye^{xz}\vec{k}.$$

(ii) Dada a função $\vec{f}(u, v) = (ue^v, u^2v)$, determinar $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}$ no ponto $(2, 0)$ e $\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}$ no ponto $(-1, 1)$.

Temos, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u} = (e^v, 2uv)$;

$$\left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\right|_{(2,0)} = (e^0, 2.2.0)$$

$$= (1, 0).$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial v} = (ue^v, u^2);$$

$$\left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\right|_{(-1,1)} = (-e, 1).$$

3.10.3 Interpretação geométrica

Seja $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ uma função vetorial contínua. Se todas as variáveis, exceto uma, que pode ser tomada como parâmetro, permanecem fixas, então $\vec{f}$ descreve uma curva no espaço.

A derivada parcial de $\vec{f}$ em relação a x no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é a derivada da função

$$\vec{g}(x) = \vec{f}(x, y_0, z_0)$$

no ponto x_0. Portanto, como vimos em 1.9.3, se no ponto P_0, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x} \neq 0$, este vetor é tangente à curva dada por $\vec{g}(x)$.

Analogamente, no ponto P_0, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y}$ é um vetor tangente à curva dada por

$$\vec{h}(y) = \vec{f}(x_0, y, z_0) \qquad \text{e}$$

$\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z}$ é um vetor tangente à curva dada por

$$\vec{p}(z) = \vec{f}(x_0, y_0, z).$$

Na Figura 3.11 ilustramos a interpretação geométrica das derivadas parciais para uma função vetorial de duas variáveis $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$. Denotamos por C_1 a curva dada por $\vec{g}(x) = \vec{f}(x, y_0)$ e por C_2 a curva dada por $\vec{h}(y) = \vec{f}(x_0, y)$. A derivada parcial $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$ é tangente à curva C_1 e a derivada parcial $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y}(x_0, y_0)$ é tangente à curva C_2.

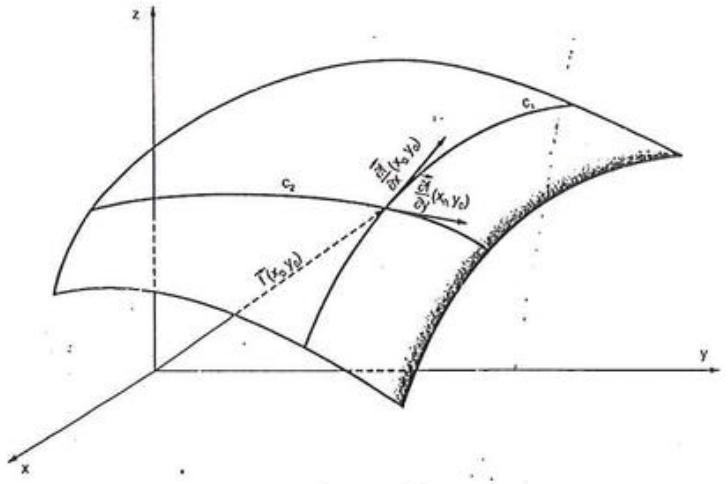


Figura 3.11

3.10.4 Exemplos

(i) Seja $\vec{f}$ a função vetorial dada por

$$\vec{f}(x, y, z) = y^2\vec{i} + z\cos x\,\vec{j} + z\,\text{sen}x\,\vec{k}.$$

a) Descrever a curva obtida fazendo $y = 0$ e $z = 3$.

b) Representar nesta curva a derivada parcial $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}$ no ponto $P_0\left(\dfrac{\pi}{6}, 0, 3\right)$.

Solução de (a). Fixando $y = 0$ e $z = 3$, obtemos a função vetorial

$$\vec{g}(x) = \vec{f}(x, 0, 3)$$
$$= 3\cos x\,\vec{j} + 3\,\text{sen}x\,\vec{k},$$

que descreve uma circunferência no plano yz (ver Figura 3.12(a)). A variável x pode ser interpretada como o parâmetro t, conforme vimos em 2.4.3.

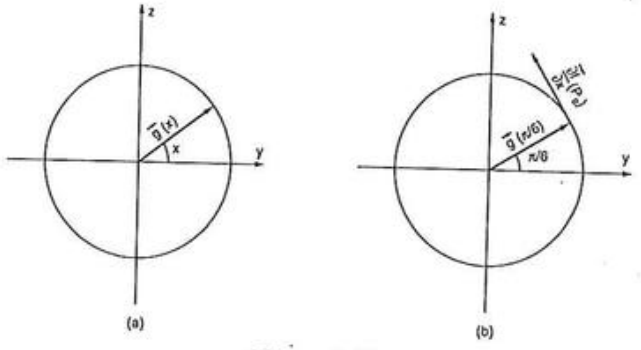


Figura 3.12

Solução de (b). A derivada parcial $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}$ é dada por

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = -z\,\text{sen}x\,\vec{j} + z\cos x\,\vec{k}.$$

No ponto $P_0\left(\dfrac{\pi}{6}, 0, 3\right)$, temos

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(P_0) = -3\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\,\vec{j} + 3\cos\frac{\pi}{6}\,\vec{k}.$$

Esta derivada parcial é a derivada da função

$$\vec{g}(x) = 3\cos x\,\vec{j} + 3\operatorname{sen} x\,\vec{k},$$

no ponto $x_0 = \frac{\pi}{6}$ e, geometricamente, está representada na Figura 3.12 (b).

(ii) Seja $\vec{f}$ a função vetorial definida por

$$\vec{f}(u, v) = (u\cos v,\ u\operatorname{sen} v,\ 4 - u^2),$$

para $0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\pi$.

a) Determinar as curvas obtidas fazendo $u = \sqrt{2}$ e $v = \frac{\pi}{4}$, respectivamente.

b) Determinar $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ e $\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ representando-os geometricamente.

Solução de (a). Fazendo $u = \sqrt{2}$, obtemos a curva C_1, dada por

$$\vec{h}(v) = \vec{f}(\sqrt{2}, v)$$

$$= (\sqrt{2}\cos v,\ \sqrt{2}\operatorname{sen} v,\ 2),\ 0 \le v \le 2\pi.$$

A curva C_1 é uma circunferência de centro (0, 0, 2) e raio $\sqrt{2}$, localizada no plano $z = 2$ e está representada na Figura 3.13.

Fazendo $v = \frac{\pi}{4}$, obtemos a curva C_2, dada por

$$\vec{g}(u) = \vec{f}\left(u, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}u,\ \frac{\sqrt{2}}{2}u,\ 4 - u^2\right),\ 0 \le u \le 2.$$

As equações paramétricas da curva C_2 são

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}u$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}u$$

$$z = 4 - u^2.$$

Eliminando o parâmetro u, temos $x = y$, $z = 4 - 2x^2$. Isso nos mostra que a curva C_2 é uma parábola contida no plano $x = y$ (ver Figura 3.13).

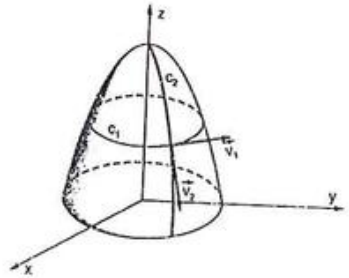


Figura 3.13

Solução de (b). Temos,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u} = (\cos v,\ \operatorname{sen} v,\ -2u);$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial v} = (-u\operatorname{sen} v,\ u\cos v,\ 0).$$

Portanto,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right) \text{ e}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = (-1, 1, 0).$$

Na Figura 3.13, representamos os vetores $\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ e $\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ que são tangentes às curvas C_1 e C_2, respectivamente.

3.10.5 Derivadas Parciais Sucessivas

As derivadas parciais de uma função vetorial de várias variáveis $\vec{f}$ são também funções vetoriais de várias variáveis. Se as derivadas parciais destas funções vetoriais existem, elas são chamadas derivadas parciais de 2ª ordem de $\vec{f}$.

Se $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$, temos quatro derivadas parciais de 2ª ordem dadas por

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}\right).$$

Se $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$, cada uma das três derivadas parciais de 1ª ordem origina três derivadas parciais de 2ª ordem.

Analogamente, obtêm-se as derivadas parciais de ordem maior.

3.10.6 Exemplos

(i) Dada a função

$$\vec{f}(x, y, z) = (\text{sen}(xy + 2z),\ e^x \text{ seny},\ x\ln yz)$$

determinar $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z \partial x}$ e $\dfrac{\partial^3 \vec{f}}{\partial y \partial z \partial x}$.

Temos,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = (y\cos(xy + 2z),\ e^x \text{ seny},\ \ln yz);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z \partial x} = \left(-2y \text{ sen}(xy + 2z),\ 0,\ \frac{1}{z}\right);$$

$$\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial y \partial z \partial x} = (-2yx\cos(xy + 2z) - 2 \text{ sen}(xy + 2z),\ 0,\ 0).$$

(ii) Dada a função

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^4y^2,\ y^4 + z^4,\ xyz),$$

determinar $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}$ no ponto $P(2, 1, 4)$.

UNED-PONTA GROSSA
CEFET-PR

Snow666

Temos,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = (4x^3y^2,\ 0,\ yz);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x} = (8x^3y,\ 0,\ z);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x}(P) = (8.2^3.1,\ 0,\ 4)$$

$$= (64,\ 0,\ 4);$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = (2x^4y,\ 4y^3,\ xz);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} = (8x^3y,\ 0,\ z);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}(P) = (64,\ 0,\ 4).$$

Neste exemplo, podemos observar que $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}$. Temos o seguinte teorema cuja demonstração será omitida.

3.10.7 Teorema

Suponhamos que $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$ seja definida sobre uma bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ e que $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}$ também sejam definidas em B. Então, se $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}$ são contínuas em B, temos $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

O teorema anterior é conhecido como Teorema de Schwarz e também é válido, com as hipóteses adequadas, para funções de três ou mais variáveis.

3.11 EXERCÍCIOS

1. Representar geometricamente as seguintes bolas:

   a) $B(P_0, r)$ $P_0 = (1, 2, -1)$ e $r = \frac{1}{3}$

   $P_0 = \left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$ e $r = 2$

   $P_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $r = 3$

   b) $B[P_0, r]$ $P_0 = (-1, -1, -1)$ e $r = 1$

   $P_0 = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $r = \frac{1}{2}$.

2. Cada uma das inequações abaixo determina um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Identificar as bolas abertas e as bolas fechadas determinando o centro e o raio.

   a) $x^2 + y^2 - 2y + 1 < 3$

   b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x + 2y + 2z$

   c) $x^2 + y^2 \leq z^2$

   d) $x^2 + y^2 - 1 > 0$

   e) $x^2 + 4x + y^2 < 5$

   f) $x^2 + y^2 + z < 2$.

3. Identificar as afirmações verdadeiras:

   a) A união de bolas abertas é uma bola aberta.

   b) A união de bolas abertas é um conjunto aberto.

   c) A união de bolas abertas é um conjunto conexo.

   d) O conjunto $A = \{(x, y) \mid x^2 + 2x + y^2 - 4y > 0\}$ é conexo.

   e) O conjunto $B = \{(x, y) \mid x^2 > y^2\}$ é aberto.

4. Verificar quais dos conjuntos abaixo são conexos:

   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 5y^2 \leq 10\}$

   $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$

   $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 9y^2 + z^2 \geq 18\}$

   $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{|x|}, x \neq 0\right\}$.

5. Escrever a função vetorial que associa a cada ponto do plano xy o triplo de seu vetor posição.

6. Escrever a função vetorial que associa a cada ponto do espaço um vetor unitário com a mesma direção do vetor posição e sentido contrário.

7. Dar o domínio das seguintes funções vetoriais:

   a) $\vec{f}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\vec{k}$

   b) $\vec{g}(x, y) = \frac{1}{x}\vec{i} + xy\vec{j}$

   c) $\vec{h}(x, y) = \left(x^2 + y^2, x\sqrt{y}, xy\right)$

   d) $\vec{p}(x, y, z) = \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}, \frac{1}{z}\right)$

   e) $\vec{q}(x, y) = \left(\frac{1}{xy}, \sqrt{xy}\right)$

   f) $\vec{u}(x, y, z) = x^2y\,\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{z}\,\vec{k}$

   g) $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{j} + \sqrt{x + z}\,\vec{k}$

   h) $\vec{r}(x, y, z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\,\vec{i} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\vec{j} + z\vec{k}$.

8. Calcular $\lim_{\vec{r}\to\vec{r}_0} \vec{f}(x, y, z)$, dado:

a) $\vec{f}(x, y, z) = \left(x^2 + y^2, \frac{xy}{z}, \frac{x-2}{x^2-4}\right)$; $\vec{r}_0 = (2, 1, 1)$

b) $\vec{f}(x, y, z) = \left(e^x, \frac{\operatorname{sen} y}{y}, x + y + z\right)$; $\vec{r}_0 = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$

c) $\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{x-y}, x^2, \sqrt{z}\right)$; $\vec{r}_0 = (2, 1, 4)$.

9. Determinar os limites seguintes:

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(\frac{1}{xy}, \sqrt{xy}\right)$

b) $\lim_{(x,y,z)\to\left(0,1,\frac{\pi}{4}\right)} \left(\frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{y}{x}, \cos x, \operatorname{tg} yz\right)$

c) $\lim_{(x,y,z)\to(3,4,1)} \left(x\sqrt{y}, \frac{xz-x}{z^2-1}, y \ln z\right)$.

10. Analisar a continuidade das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(x, y) = (xy, x^2 - y^2, 2)$

b) $\vec{g}(x, y, z) = \begin{cases} \left(x, y \operatorname{sen} y, xz^2 \operatorname{sen}\frac{1}{z}\right), & z \neq 0 \\ (x, y \operatorname{sen} y, 0), & z = 0 \end{cases}$

c) $\vec{h}(x, y) = (x \ln y, y \ln x)$

d) $\vec{p}(x, y, z) = e^{xy}\vec{i} + \ln xz\,\vec{j} + 2\vec{k}$

e) $\vec{q}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x-y}, \frac{2}{x}, z\right)$

f) $\vec{r}(x, y, z) = \frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|}$ onde $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

g) $\vec{u}(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2)$.

11. Calcular as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções:

a) $\vec{f}(x, y, z) = \sqrt{y}\,\vec{i} + x^2y^2z^2\,\vec{j} + e^{xyz}\,\vec{k}$

b) $\vec{g}(x, y, z) = \left(\frac{x-y}{x+y}, 2x, 3\right)$

c) $\vec{h}(x, y, z) = (9 - z^2, 9 - y^2, 9 - x^2)$

d) $\vec{p}(x, y) = (e^{2x}, xye^{3y})$

e) $\vec{q}(x, y) = (x\sqrt{y}, (x - y)\ln y)$

f) $\vec{u}(x, y, z) = e^{xy}\,\vec{i} + \ln xz\,\vec{j} + 2\vec{k}$.

12. Dada $\vec{f}(x, y, z) = (e^{xy}, e^{yz}, e^{xz})$ encontrar $\frac{\partial\vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial z}$.

13. Dada $\vec{f}(x, y, z) = (x^2y, x + y, xz)$ verificar que $\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(1, 0, 1) + \frac{\partial\vec{f}}{\partial y}(1, 0, 1) = \vec{a}$, onde $\vec{a} = \lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \vec{f}(x, y, z)$.

14. Seja $\vec{f}$ a função vetorial dada por $\vec{f}(x, y, z) = xz\,\vec{i} + y(1 + x^2)\,\vec{j} + z\vec{k}$.

a) Descrever a curva obtida fazendo $y = 2$ e $z = 1$.

b) Representar nesta curva a derivada parcial $\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}$ no ponto $P_0(1, 4, 1)$.

15. Seja $\vec{f}$ a função vetorial definida por $\vec{f}(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, 3 + u^2)$ para $0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

a) Determinar as curvas obtidas fazendo $u = \sqrt{3}$ e $v = \frac{\pi}{2}$, respectivamente.

b) Determinar $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\frac{\partial\vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ representando-os geometricamente.

16. Dada a função $\vec{f}(x, y) = \left(xyz, xy, \sqrt{x^2 + z^2}\right)$, determinar $\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial x\partial y}$.

17. Determinar $\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x \partial y \partial z}$ e $\frac{\partial^4 \vec{f}}{\partial x \partial z^2 \partial y}$, sendo $\vec{f}(x, y, z) = (xy^4, xz^3 + 1, xe^{yz})$.

18. Encontrar $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x^2 \partial y}$ e $\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial z^3}$ das seguintes funções:

a) $\vec{f}(x, y, z) = (xyz, \ln y, \ln z)$

b) $\vec{f}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} x, e^x \operatorname{sen} y, z)$

c) $\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y^2}, xyz\right)$.

19. Encontrar $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2}(P_0) - 4\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z^2}(P_0)$, dados

$\vec{f}(x, y, z) = (x + y + z, (x + y + z)^2, (x + y + z)^3)$ e $P_0(1, 0, 1)$.

Snow666

MAKRON Books

Capítulo 4

DERIVADA DIRECIONAL E CAMPOS GRADIENTES

Neste capítulo apresentaremos a derivada direcional de uma função escalar e de uma função vetorial. O uso do gradiente é então introduzido, facilitando o cálculo da derivada direcional e de suas aplicações.

Também, analisaremos combinações especiais das derivadas parciais de uma função vetorial $\vec{f}(x, y, z)$. Surgem então, o divergente e o rotacional de $\vec{f}(x, y, z)$.

Veremos que campos vetoriais podem ser definidos a partir de campos escalares e vice-versa.

4.1 CAMPOS ESCALARES E VETORIAIS

Dada uma região D do espaço, podemos associar a cada ponto de D uma grandeza escalar ou também uma grandeza vetorial. No mundo físico fazemos isso, freqüentemente. Por exemplo, dado um corpo sólido T, podemos associar a cada um de seus pontos a sua temperatura. Dizemos que um campo escalar está definido em T.

No caso de um fluido em movimento, a cada partícula corresponde um vetor velocidade $\vec{v}$. Neste exemplo, vemos que um campo vetorial está definido em D.

Veremos a seguir que um campo escalar é definido por uma função escalar e um campo vetorial por uma função vetorial.

4.1.1 Definição

Seja D uma região no espaço tridimensional e seja f uma função escalar definida em D. Então, a cada ponto $P \in D$, f associa uma única grandeza escalar $f(P)$. A região D, juntamente com os valores de f em cada um de seus pontos, é chamada um campo escalar. Dizemos também que f define um campo escalar sobre D.

4.1.2 Exemplos

(i) Se D é um sólido no espaço e ρ a densidade em cada um de seus pontos, ρ define um campo escalar sobre D.

(ii) Seja D um sólido esférico de raio r cuja temperatura em cada um de seus pontos é proporcional à distância do ponto até o centro da esfera. Usando um sistema de coordenadas cartesianas adequado, descrever a função escalar T que define o campo de temperatura em D.

Solução. Traçamos um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem coincide com o centro da esfera (ver Figura 4.1).

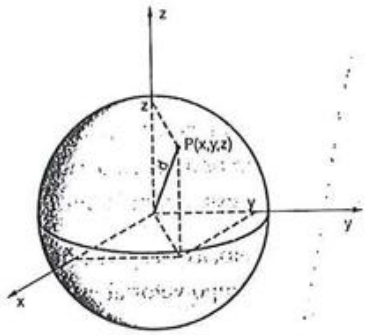


Figura 4.1

A distância de um ponto qualquer $P(x, y, z)$ do sólido esférico até o centro é dada por $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Como a temperatura em $P(x, y, z)$ é proporcional à distância de P até o centro, a função que define o campo de temperatura é dada por $T(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onde k é uma constante.

(iii) Um tanque T tem a forma de um cilindro circular reto de raio 1m e altura 3m. O tanque está cheio de uma substância líquida. Cada partícula desta substância está sujeita a uma pressão que é proporcional à distância da partícula até a superfície livre do líquido. Usando coordenadas cartesianas, definir uma função escalar que descreve o campo de pressão no interior de T.

Solução. A Figura 4.2 mostra o tanque T. O sistema de coordenadas cartesianas foi traçado de tal forma que sua origem coincide com o centro da base do tanque.

A distância de uma partícula qualquer $Q(x, y, z)$ até a superfície livre do líquido é dada por

$$d = 3 - z.$$

Portanto, a função

$$P(x, y, z) = k(3 - z),$$

onde k é uma constante de proporcionalidade, define o campo de pressão no interior de T.

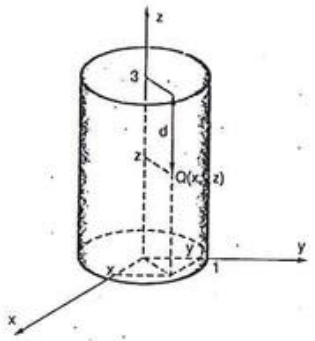


Figura 4.2

(iv) Um campo minado consiste de uma região de combate R, onde previamente são escolhidos pontos aleatórios, nos quais se colocam explosivos. Esse campo pode ser descrito pela função escalar que associa a cada ponto de R onde existe uma mina, o valor 1 e aos demais pontos de R, o valor 0.

4.1.3 Definição

Seja D uma região no espaço e $\vec{f}$ uma função vetorial definida em D. Então, a cada ponto $P \in D$, $\vec{f}$ associa um único vetor $\vec{f}(P)$. A região D, juntamente com os correspondentes vetores $\vec{f}(P)$, constitui um campo vetorial. Dizemos também, que $\vec{f}$ define um campo vetorial sobre D.

4.1.4 Exemplos

(i) Seja D a atmosfera terrestre. A cada ponto $P \in D$ associamos o vetor $\vec{v}(P)$ que representa a velocidade do vento em P. Então $\vec{v}$ define um campo vetorial em D chamado campo de velocidade.

(ii) $\vec{f}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ define um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^2$.

(iii) $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, -z)$ define um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$.

Freqüentemente, identifica-se um campo escalar com a função escalar que o define. Da mesma forma, uma função vetorial é identificada com o campo vetorial por ela definido.

4.1.5 Representação geométrica de um campo vetorial

Podemos representar graficamente um campo vetorial $\vec{f}$ definido em uma região D. Para isso, tomamos alguns pontos $P \in D$ e desenhamos o vetor $\vec{f}(P)$ como uma seta com a origem em P (trasladada paralelamente da origem para P). Podemos visualizar o campo vetorial, imaginando a seta apropriada emanando de cada ponto da região D.

4.1.6 Exemplos

Representar geometricamente os campos vetoriais:

(i) $\vec{f}(x, y) = x\vec{i}$.

$\vec{f}$ define um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$. A todos os pontos do eixo y, $\vec{f}$ associa o vetor nulo. Aos pontos que estão sobre a reta $x = 1$, $\vec{f}$ associa o vetor $\vec{i}$. De forma geral, $\vec{f}$ associa a todos os pontos que estão sobre uma reta vertical $x = a$, o vetor $a\vec{i}$. A Figura 4.3 mostra este campo.

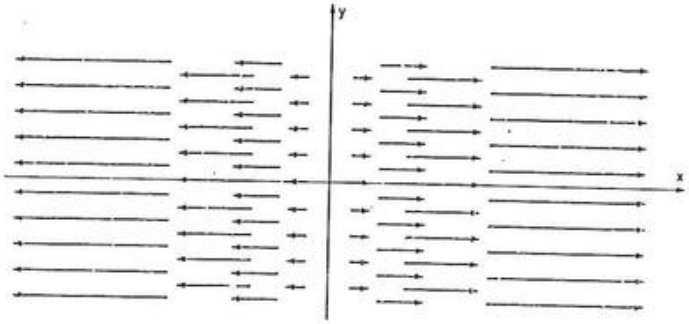


Figura 4.3

(ii) $\vec{f}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$.

A função vetorial $\vec{f}$ associa a cada ponto (x, y) do plano o seu vetor posição $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Para representar o campo, traçamos algumas retas que passam pela origem e algumas circunferências com centro na origem. Desenhamos os vetores correspondentes aos pontos de intersecção das circunferências com as retas.

A Figura 4.4 mostra este campo que é denominado campo radial.

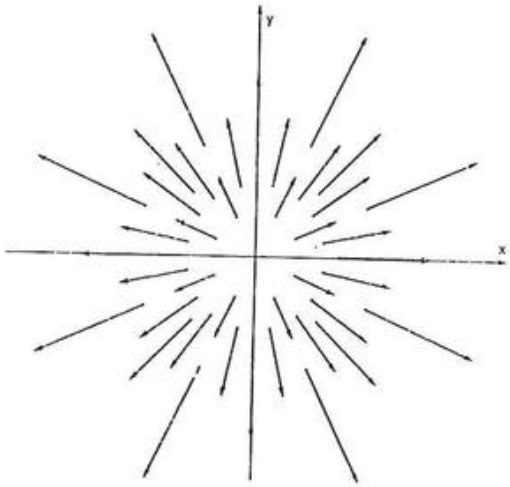


Figura 4.4

(iii) $\vec{f}(x, y) = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}$.

Neste exemplo podemos observar que, para qualquer ponto (x, y), $\vec{f}(x, y)$ é um vetor unitário. Além disso, se $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ é o vetor posição do ponto (x, y), o produto escalar

$$\vec{r} \cdot \vec{f}(x, y) = 0.$$

Isso nos diz que o vetor $\vec{f}(x, y)$ é perpendicular ao vetor posição $\vec{r}$, sendo, portanto, tangente à circunferência de centro na origem e raio $|\vec{r}|$.

A Figura 4.5 mostra este campo, que é chamado campo tangencial. Fisicamente, ele pode representar um campo de velocidades em um movimento circular.

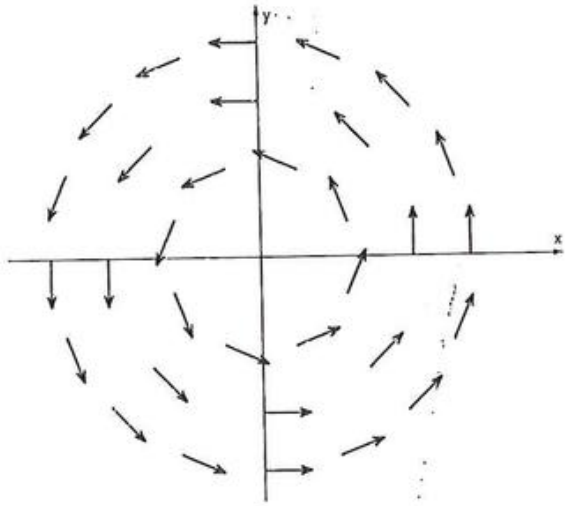


Figura 4.5

(iv) $\vec{f}(x, y, z) = -k\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $k > 0$ constante.

Este campo é chamado campo radial de quadrado inverso e ocorre freqüentemente nas aplicações. Em Física, ele é usado para descrever a força de atração gravitacional de

uma partícula de massa M, situada na origem, sobre uma outra partícula de massa m localizada no ponto $P(x, y, z)$.

Para ilustrar este campo, observamos que:

a) $\vec{f}(x, y, z)$ não é definido na origem;

b) $\left|\vec{f}(x, y, z)\right| = k\dfrac{|\vec{r}|}{|\vec{r}|^3} = \dfrac{k}{|\vec{r}|^2}$, isto é, o módulo do vetor $\vec{f}(x, y, z)$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto (x, y, z) até a origem;

c) $\vec{f}(x, y, z)$ é um múltiplo escalar negativo do vetor posição $\vec{r}$. Portanto, ele tem a mesma direção de $\vec{r}$ e aponta para a origem.

A Figura 4.6 mostra o campo.

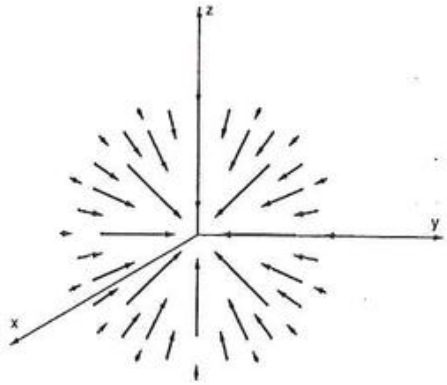


Figura 4.6

(v) A Figura 4.7 mostra o esboço de diversos campos vetoriais que ocorrem nas aplicações. Na Figura 4.7(a) temos um campo de velocidades de um fluido em movimento e na 4.7(b) temos um campo de força eletrostática, originário de 2 cargas de sinais opostos.

A Figura 4.7(c) nos mostra um campo de velocidade em um volante em movimento circular uniforme. Na Figura 4.7(d) vemos o campo de velocidade de um redemoinho.

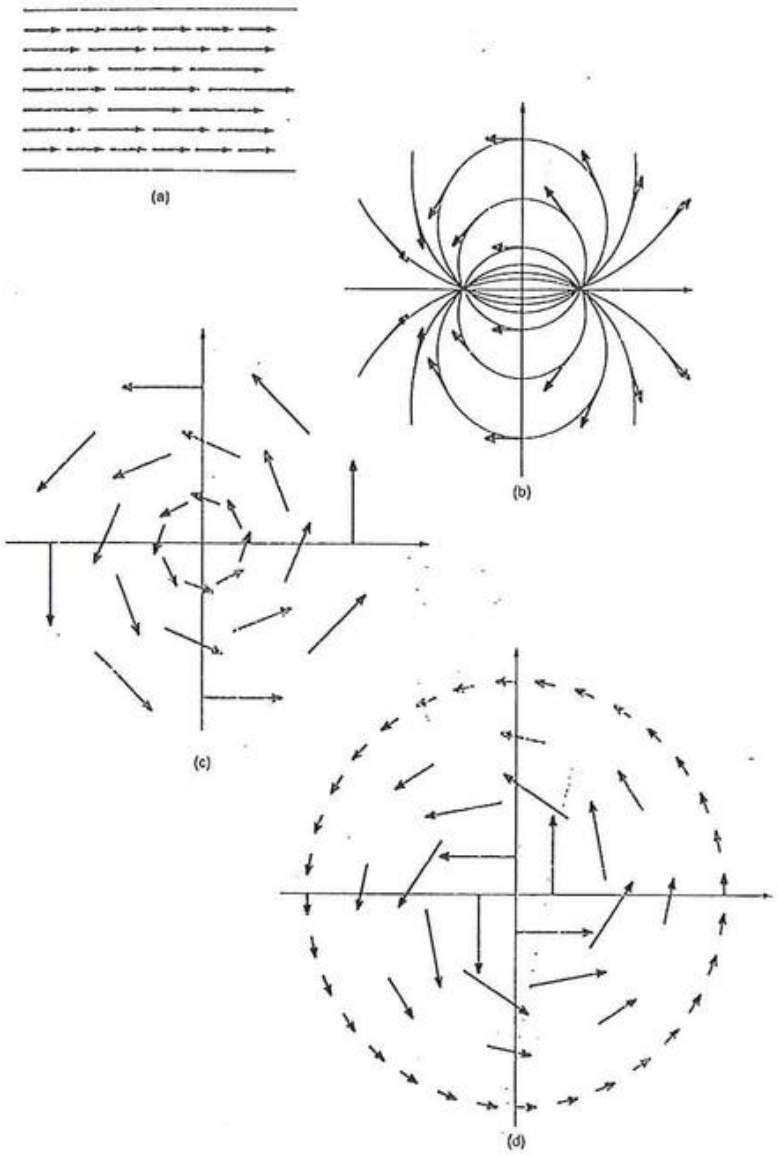


Figura 4.7

4.2 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 7 representar graficamente os seguintes campos vetoriais:

1. $\vec{f}(x, y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$
2. $\vec{f}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
3. $\vec{f}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$
4. $\vec{f}(x, y) = 2\vec{i}$
5. $\vec{f}(x, y) = 2\vec{i} + \vec{j}$
6. $\vec{f}(x, y, z) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
7. $\vec{f}(x, y) = \left(x, \dfrac{y}{2}\right)$
8. Suponhamos que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço é dada por $x^2 + y^2 + z^2$. Uma partícula P se move de modo que no tempo t a sua posição é dada por (t, t^2, t^3).
   a) Identificar a função escalar que nos dá a temperatura em um ponto qualquer do espaço.
   b) Identificar a função vetorial que descreverá o movimento da partícula P.
   c) Determinar a temperatura no ponto ocupado pela partícula em $t = \dfrac{1}{2}$.
9. O campo vetorial $\vec{f} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$ aproxima o campo de velocidade da água, que ocorre quando se puxa um tampão em uma canalização. Representar graficamente este campo.
10. Seja D um sólido esférico de raio r. A temperatura em cada um de seus pontos é proporcional a distância do ponto até a superfície da esfera.
    a) Usando coordenadas cartesianas, determinar a função que define o campo de temperatura.
    b) Determinar as superfícies isotermas do campo de temperatura em D, isto é, determinar as superfícies onde a temperatura é constante.

11. As funções abaixo definem campos vetoriais sobre $\mathbb{R}^2$. Determinar e fazer os gráficos das curvas onde $|\vec{f}|$ é constante.

a) $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j}$

b) $\vec{f} = x\vec{i} + 4y\vec{j}$

c) $\vec{f} = 2\vec{i} + x\vec{j}$

d) $\vec{f} = (x - 2)\vec{i} + (y - 4)\vec{j}$.

12. Um tanque tem a forma de uma paralelepípedo retângulo cuja base tem dimensões 1m e 2m e cuja altura é 1,5m. O tanque está cheio de uma substância com densidade variável. Em cada ponto, a densidade é proporcional à distância do ponto até a superfície superior do tanque.

a) Determinar a função que define o campo de densidade.

b) Determinar as superfícies onde a densidade é constante.

13. A temperatura nos pontos de um sólido esférico é dada pelo quadrado da distância do ponto até o centro da esfera. Usando coordenadas cartesianas, determinar o campo de temperatura.

14. Um campo minado tem a forma de um retângulo de lados a e b. O campo foi dividido em pequenos retângulos de lados a/m e b/n, m e n inteiros positivos. Os explosivos foram colocados nos vértices desses retângulos. Usando coordenadas cartesianas, descrever analiticamente este campo.

15. As funções abaixo definem campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$. Determinar e fazer os gráficos das curvas onde $\vec{f}$ tem direção constante.

a) $\vec{f} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$

b) $\vec{f} = x^2\vec{i} + y\vec{j}$

c) $\vec{f} = x\vec{i} + \vec{j}$

d) $\vec{f} = x\vec{i} + y^2\vec{j}$.

16. O campo $\vec{f}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ representa a velocidade de um volante em rotação rígida em torno do eixo z. Descrever graficamente o campo. Qual o sentido do movimento de rotação?

17. Um furacão se desloca na superfície terrestre, atingindo uma faixa retilínea de 20 km de largura. Na zona central da faixa (2 km de largura) a velocidade do vento é de 200 km/h. Nos demais pontos é dada por $\vec{v} = 200 - 14x$, onde x é a distância do ponto até o centro da faixa. Esboçar o campo.

18. Seja P_0 um ponto fixo no espaço e $d(P, P_0)$ a distância de um ponto qualquer P até P_0. Se P_0 tem coordenadas cartesianas (x_0, y_0, z_0) e $P = P(x, y, z)$, descrever analiticamente este campo.

19. Uma cidade x está localizada a 1100m acima do nível do mar. O plano diretor da cidade prevê a construção de edifícios, desde que eles não ultrapassem a cota de 1140m. O relevo da cidade é bastante irregular, tendo partes altas e baixas. Definimos um campo escalar em x, associando a cada ponto P, a altura máxima que poderá ter um edifício ali localizado. Descrever analiticamente este campo.

20. a) Escrever uma função vetorial em duas dimensões que defina um campo radial, cuja intensidade é igual a 1.

b) Escrever uma função vetorial em três dimensões que defina um campo radial, cuja intensidade é igual a 1.

c) Escrever uma função vetorial em duas dimensões que defina um campo vetorial tangencial, cuja intensidade em cada ponto (x, y) é igual a distância deste ponto até a origem.

4.3 DERIVADA DIRECIONAL DE UM CAMPO ESCALAR

Vejamos os seguintes problemas:

Problema 1. Suponha que um pássaro esteja pousado em um ponto A de uma chapa R cuja temperatura T é função dos pontos da mesma. Se o pássaro se deslocar em uma determinada direção, ele vai "sentir" aumento ou diminuição de temperatura? (ver Figura 4.8).

Problema 2. Suponhamos que, em uma outra situação, podemos conhecer a temperatura do ar nos pontos do espaço por meio de uma função $T(x, y, z)$. Um pássaro localizado em um ponto P, deseja esfriar-se o mais rápido possível. Em que direção e sentido ele deve voar?

Estas e outras situações podem ser resolvidas, tendo-se o conhecimento da derivada direcional.

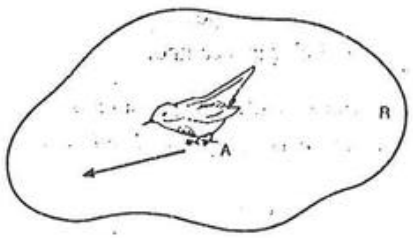


Figura 4.8

4.3.1 Definição

Consideremos um campo escalar $f(x, y, z)$. Escolhemos um ponto P no espaço e uma direção em P, dada por um vetor unitário $\vec{b}$. Seja C uma semi-reta cuja origem é P e possui a direção de $\vec{b}$ e seja Q um ponto sobre C cuja distância de P é s (ver Figura 4.9). Se existir o limite

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s},$$

ele é chamado derivada direcional de f em P, na direção de $\vec{b}$.

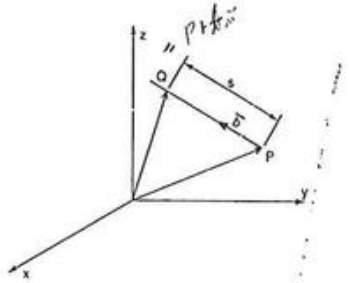


Figura 4.9

Observamos que:

1) O quociente $\frac{f(Q) - f(P)}{s}$ é a taxa média de variação do campo escalar f, por unidade de comprimento, na direção escolhida. Assim, $\frac{\partial f}{\partial s}(P)$ é a taxa de variação da função f, na direção de $\vec{b}$, no ponto P.

Voltando ao Problema 1, podemos dizer que a resposta para a pergunta proposta será encontrada mediante a análise da taxa de variação da temperatura em relação à distância, no ponto A, quando o pássaro se move na direção dada. Logo, devemos encontrar a derivada direcional da função temperatura.

2) Existe um número infinito de derivadas direcionais de f em P.

3) As derivadas parciais de f,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial z} \text{ em } P,$$

são as derivadas direcionais de f nas direções de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.

4.3.2 Exemplos

(i) Calcular a derivada direcional do campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $P(2, 1)$, na direção de $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

O vetor unitário na direção de $\vec{v}$ é

$$\vec{b} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-1, 2)}{\sqrt{1 + 4}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ (ver Figura 4.10).}$$

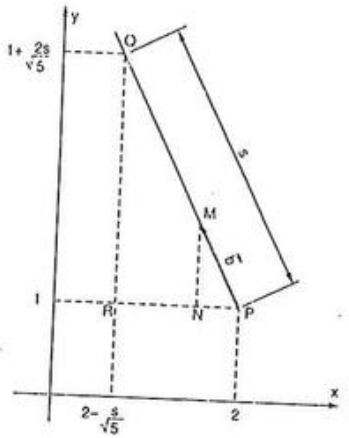


Figura 4.10

Do triângulo retângulo MNP temos que $\overline{PM} = 1$, $\overline{PN} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\overline{MN} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. O triângulo QRP é semelhante ao triângulo MNP. Portanto, $\overline{PR} = \frac{s}{\sqrt{5}}$ e $\overline{QR} = \frac{2s}{\sqrt{5}}$, onde $s = \overline{PQ}$. As coordenadas do ponto Q são $\left(2 - \frac{s}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$.

Aplicamos agora a Definição 4.3.1. Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial s}^{(2,1)}(P) = \lim_{s\to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{f\left(2 - \frac{s}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}\right) - f(2, 1)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\left(2 - \frac{s}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}\right)^2 - (2^2 + 1^2)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} s$$

$$= 0.$$

(ii) Determinar a derivada direcional do campo escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$, em $P(1, 2, 2)$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Neste exemplo, ilustramos um procedimento alternativo para encontrar a derivada direcional, utilizando uma parametrização de C pelo comprimento de arco.

A Figura 4.11 mostra o ponto P e a semi-reta C, com origem em P, na direção de $\vec{a}$. Uma parametrização de C é dada por $\vec{r}(t) = (1 + t, 2 + 2t, 2 + 2t)$, $t \geq 0$.

Reparametrizando C pelo comprimento de arco a partir de P, obtemos

$$\vec{h}(s) = \left(1 + \frac{s}{3}, 2 + \frac{2s}{3}, 2 + \frac{2s}{3}\right), \quad s \geq 0.$$

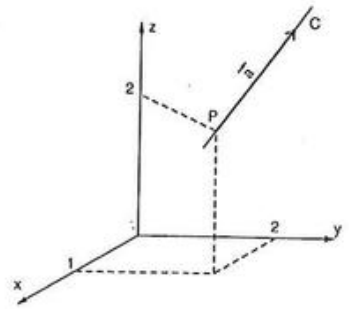


Figura 4.11

Como o ponto Q é um ponto de C, suas coordenadas são

$$\left(1 + \frac{s}{3}, 2 + \frac{2s}{3}, 2 + \frac{2s}{3}\right).$$

Portanto, aplicando a Definição 4.3.1, vem

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{s\to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)^2 + \left(2 + \frac{2s}{3}\right)^2 - 2\left(2 + \frac{2s}{3}\right)^2 - (1 + 4 - 8)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{-2s - \frac{s^2}{3}}{s}$$

$$= -2.$$

(iii) Supor que a derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a x em um ponto P existe. Verificar que esta derivada é igual a derivada direcional de $f(x, y)$ em P, na direção $\vec{b} = \vec{i}$.

A Figura 4.12 auxilia em fazermos esta verificação.

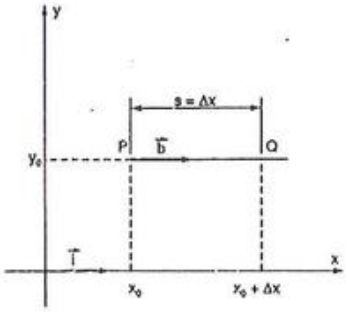


Figura 4.12

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(P).$$

O cálculo de $\frac{\partial f}{\partial s}(P)$, usando a Definição 4.3.1, é bastante trabalhoso. Podemos facilitá-lo, usando as derivadas parciais de 1ª ordem de f em P. Para isso, vamos definir o gradiente de f em um ponto P.

4.4 GRADIENTE DE UM CAMPO ESCALAR

Seja $f(x, y, z)$ um campo escalar definido em um certo domínio. Se existem as derivadas parciais de 1ª ordem de f neste domínio, elas formam as componentes do vetor gradiente de f.

4.4.1 Definição

O gradiente da função escalar $f(x, y, z)$, denotado por grad f, é um vetor, definido como

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

4.4.2 Exemplos

(i) Encontrar o gradiente dos campos escalares:

a) $f(x, y, z) = 2(x^2 + y^2) - z^2$;

b) $g(x, y) = x + e^y$.

Usando a definição 4.4.1, temos

a) grad $f = 4x\,\vec{i} + 4y\,\vec{j} - 2z\,\vec{k}$ e

b) grad $g = \vec{i} + e^y\vec{j}$.

(ii) O gradiente de um campo escalar $f(x, y, z)$ define um campo vetorial denominado campo gradiente. Esboçar o gráfico do campo gradiente gerado pela função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Temos que

$$\text{grad } f = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

O gráfico deste campo pode ser visto na Figura 4.13.

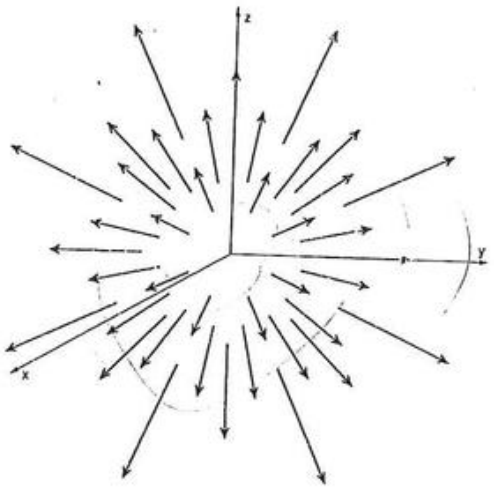


Figura 4.13

(iii) Calcular o gradiente de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, em $P(2, -1)$.

Temos, grad $f = 4x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$;

grad $f(2, -1) = 8\,\vec{i} - 2\vec{j}$.

(iv) Em uma esfera metálica de raio 3, a temperatura $T(x, y, z)$ em cada ponto é proporcional a distância do ponto até a superfície da esfera, sendo 1 o coeficiente de proporcionalidade. Representar geometricamente o campo gradiente gerado por $T(x, y, z)$.

A Figura 4.14(a) mostra a esfera metálica de raio 3, centrada na origem.

A temperatura é dada por

$$T(x,\ y,\ z) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Portanto,

$$\text{grad } T = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

O campo gradiente está representado na Figura 4.14(b).

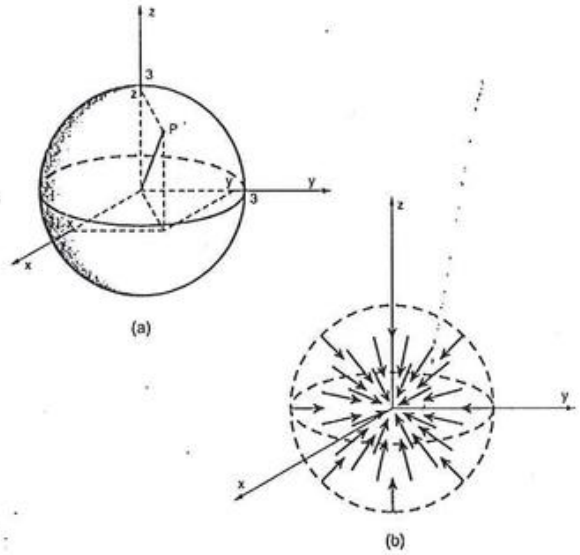


Figura 4.14

É comum denotarmos o grad f como ∇f onde ∇ (lê-se nabla ou del) representa o operador diferencial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}.$$

Temos

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \nabla f \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}\right) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}.\end{aligned}$$

4.4.3 Propriedades

Sejam f e g funções escalares tais que existam grad f e grad g e seja c uma constante. Então:

(i) grad $(cf) = c$ grad f;

(ii) grad $(f + g) =$ grad $f +$ grad g;

(iii) grad $(fg) = f$ grad $g + g$ grad f;

(iv) grad $(f/g) = \dfrac{g \text{ grad } f - f \text{ grad } g}{g^2}$

Prova do item (iii). Supondo $f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$, temos

$$\begin{aligned}\text{grad } (fg) &= \frac{\partial}{\partial x}(fg)\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(fg)\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(fg)\,\vec{k} \\ &= \left(f.\frac{\partial g}{\partial x} + g.\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(f.\frac{\partial g}{\partial y} + g.\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(f.\frac{\partial g}{\partial z} + g.\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k} \\ &= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\vec{k}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}\right) \\ &= f.\text{ grad } g + g.\text{ grad } f.\end{aligned}$$

Interpretação geométrica do gradiente

Consideremos uma função escalar $f(x, y, z)$ e suponhamos que, para cada constante k, em um intervalo I, a equação $f(x, y, z) = k$ representa uma superfície no espaço. Fazendo k tomar todos os valores, obtemos uma família de superfícies, que são chamadas superfícies de nível da função f.

4.4.4 Proposição

Seja f uma função escalar tal que, através de um ponto P do espaço, passa uma superfície de nível S de f. Se grad $f \neq 0$ em P, então grad f é normal a S em P.

Prova. Seja C uma curva no espaço que passa por P e esteja contida na superfície de nível S de f (ver Figura 4.15).

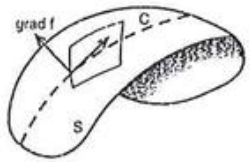


Figura 4.15

Representamos C por

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}.$$

Como C está contida em S, temos que

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k.$$

Derivando em relação a t, vem

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

ou

$$\nabla f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0.$$

Como $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ é tangente à curva C em P, segue que ∇f é normal à curva C em P.

Como C é uma curva qualquer de S, concluímos que grad f é normal à superfície S.

4.4.5 Exemplos

(i) Determinar um vetor normal à superfície $z = x^2 + y^2$ no ponto $P(1, 0, 1)$.

A superfície $z = x^2 + y^2$ pode ser escrita como $x^2 + y^2 - z = 0$

$$f(x, y, z) = 0 \text{ onde } f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z.$$

Desta forma um vetor normal a $z = x^2 + y^2$ no ponto P é dado por grad $f(P)$.

Como

$$\text{grad } f = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} - \vec{k},$$

em $P(1, 0, 1)$, temos grad $f(1, 0, 1) = 2\vec{i} - \vec{k}$.

Portanto, o vetor $2\vec{i} - \vec{k}$ é normal ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ em $P(1, 0, 1)$, conforme ilustra a Figura 4.16.

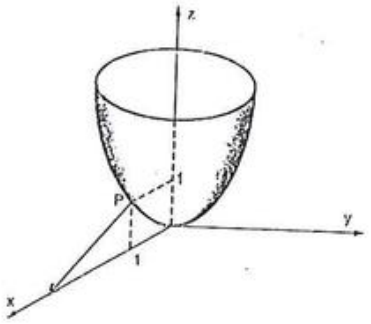


Figura 4.16

(ii) Determinar um vetor perpendicular à circunferência $x^2 + y^2 = 9$ no ponto $P(2, \sqrt{5})$.

Neste exemplo, temos que $x^2 + y^2 = 9$ é uma curva de nível da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9.$$

Portanto, se $\nabla f(P) \neq 0$, ele é perpendicular à circunferência dada. Temos,

$$\text{grad } f = (2x, 2y);$$

$$\text{grad } f(P) = \left(4,\ 2\sqrt{5}\right).$$

Logo, no ponto $P\left(2,\ \sqrt{5}\right)$, o vetor $4\vec{i} + 2\sqrt{5}\,\vec{j}$ é perpendicular à circunferência $x^2 + y^2 = 9$, conforme ilustra a Figura 4.17.

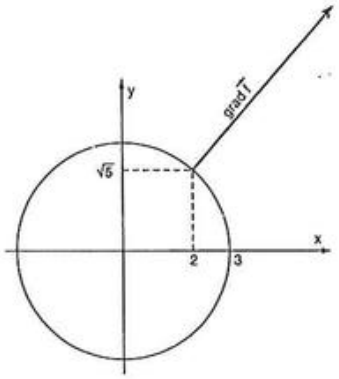


Figura 4.17

4.4.6 Cálculo da Derivada Direcional usando o Gradiente

Seja $\vec{a}$ o vetor posição do ponto P. Então, $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k} = \vec{a} + \vec{b}s$, onde $s \geq 0$ é o parâmetro comprimento de arco, é uma equação vetorial para a semi-reta C (ver Figura 4.18).

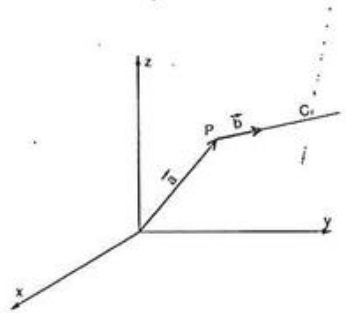


Figura 4.18

A derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial s}(P)$, na direção $\vec{b}$, em P, é a derivada da função $f(x(s), y(s), z(s))$ em relação a s em P.

Supondo que $f(x, y, z)$ possui derivadas parciais de 1ª ordem contínuas e aplicando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{dz}{ds}\right)(P). \tag{1}$$

Substituindo

$$\vec{r}\,'(s) = \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right)$$

$$= \vec{b}$$

e

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

em (1), vem

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \vec{b} \cdot \text{grad } f(P). \tag{2}$$

4.4.7 Exemplos

(i) Determinar a derivada direcional de $f(x, y, z) = 5x^2 - 6xy + z$, no ponto $P(-1, 1, 0)$, na direção do vetor $2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

Temos,

$$\text{grad } f = (10x - 6y)\vec{i} - 6x\,\vec{j} + \vec{k};$$

$$\text{grad } f(-1,\ 1,\ 0) = -16\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}.$$

O vetor unitário na direção dada é

$$\vec{b} = \frac{2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}}{\left|2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}\right|}$$

$$= \frac{2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{4 + 25 + 4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{33}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{33}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{33}}\vec{k}.$$

Portanto, usando (2), temos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(-1,\ 1,\ 0) = \left(\frac{2}{\sqrt{33}},\ \frac{-5}{\sqrt{33}},\ \frac{2}{\sqrt{33}}\right).(-16,\ 6,\ 1)$$

$$= \frac{2.(-16)}{\sqrt{33}} + \frac{-5.6}{\sqrt{33}} + \frac{2}{\sqrt{33}}$$

$$= \frac{-20\sqrt{33}}{11}.$$

(ii) Determinar a derivada direcional de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, no ponto $P\left(-1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$, na direção do vetor que une P a $Q\left(-2,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$.

Temos,

$$\text{grad } f = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k};$$

$$\text{grad } f\left(-1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}.$$

O vetor unitário na direção dada é

$$\vec{b} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}$$

$$= \frac{(-2 + 1)\vec{i} + (0 - 2)\vec{j} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{k}}{\left|-\vec{i} - 2\vec{j}\right|}$$

$$= \frac{-\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{1 + 4}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}.$$

Portanto, usando (2), temos

$$\frac{\partial f}{\partial s}\left(-1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\ \frac{-2}{\sqrt{5}},\ 0\right).(-2,\ 4,\ 1)$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{5}}.$$

O Gradiente como direção de máxima variação

4.4.8 Proposição

Seja $f(x, y, z)$ uma função escalar que possui derivadas parciais de 1ª ordem contínuas. Então, em cada ponto P para o qual $\nabla f \neq 0$, o vetor ∇f aponta na direção em que f cresce mais rapidamente. O comprimento do vetor ∇f é a taxa máxima de crescimento de f.

Prova. Como $\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \vec{b} \cdot \nabla f$, usando a definição de produto escalar, temos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \left|\vec{b}\right| |\nabla f| \cos\theta, \text{ onde } \theta \text{ é o ângulo entre os vetores } \nabla f \text{ e } \vec{b}.$$

Como $\vec{b}$ é unitário, vem

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \nabla f \cos\theta.$$

O valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial s}(P)$ é obtido quando escolhemos $\theta = 0$, isto é, quando escolhemos $\vec{b}$ com a mesma direção e sentido de ∇f.

Neste caso, $\frac{\partial f}{\partial s}(P) = |\nabla f|$.

Assim, o vetor ∇f aponta na direção em que f cresce mais rapidamente e seu comprimento é a taxa máxima de crescimento de f.

4.4.9 Exemplos

(i) No caso do Problema 2, apresentado no início da seção 4.3, podemos dizer que, se grad $T \neq 0$ em P, para se esfriar o mais rápido possível, o pássaro deve voar na direção e sentido de – grad $T(P)$.

(ii) Seja $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$.

a) Estando em (1, 1, 2), que direção e sentido deve-se tomar para que f cresça mais rapidamente?

b) Qual é o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial s}(1, 1, 2)$?

Solução de (a). Estando em (1, 1, 2), devemos tomar a direção e sentido do vetor

$$\nabla f(1, 1, 2) = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

para que f cresça mais rapidamente.

Solução de (b). O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial s}(1, 1, 2)$ é dado por

$$|\nabla f(1, 1, 2)| = 3.$$

4.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DO GRADIENTE

(i) Seja $T(x, y, z) = 10 - x^2 - y^2 - z^2$ uma distribuição de temperatura em uma região do espaço. Uma partícula P_1 localizada em $P_1(2, 3, 5)$ necessita esquentar-se o mais rápido possível. Outra partícula P_2 localizada em $P_2(0, -1, 0)$ necessita esfriar-se o mais rápido possível. Pergunta-se:

a) Qual a direção e sentido que P_1 deve tomar?

b) Qual a direção e sentido que P_2 deve tomar?

c) Qual é a taxa máxima de crescimento da temperatura em P_1 e qual é a taxa máxima de decrescimento da temperatura em P_2?

Solução. Temos que

$$\text{grad } T = (-2x, -2y, -2z).$$

a) Como P_1 necessita esquentar-se o mais rápido possível, deve tomar a direção e sentido do

$$\text{grad } T(2, 3, 5) = (-4, -6, -10).$$

b) Como P_2 necessita esfriar-se o mais rápido possível, deve tomar a direção e sentido do vetor

$$-\text{grad } T(0, -1, 0) = -(0, 2, 0)$$
$$= (0, -2, 0)$$

c) A taxa máxima de crescimento da temperatura em P_1 é dada por

$$|\text{grad } T(2, 3, 5)| = \sqrt{152}.$$

A taxa máxima de decrescimento da temperatura em P_2 é

$$|\text{grad } T(0, -1, 0)| = 2.$$

(ii) Um alpinista vai escalar uma montanha, cujo formato é aproximadamente o do gráfico de $z = 25 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Se ele parte do ponto $P_0(4, 3, 0)$, determinar a trajetória a ser descrita, supondo que ele busque sempre a direção de maior aclive.

Solução. Seja $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a equação da trajetória do alpinista.

Inicialmente vamos determinar a projeção $\vec{r}_1(t) = (x(t), y(t))$ de $\vec{r}(t)$ sobre o plano xy.

No plano xy a direção de maior aclive da montanha é dada por ∇f, onde $f = 25 - x^2 - y^2$. Como o alpinista deve se deslocar na direção de maior aclive, o ∇f deve ser tangente à projeção $\vec{r}_1(t)$ da trajetória.

Fazemos então,

$$\begin{cases} \vec{r}_1(0) = (4, 3) \\ \vec{r}_1'(t) = \text{grad } f(\vec{r}_1(t)) \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-2x(t), -2y(t)). \qquad (1)$$

Resolvendo (1), vem

$$\frac{dx}{dt} = -2x(t) \text{ e } \frac{dy}{dt} = -2y(t) \quad \text{ou}$$

$$x(t) = C_1 e^{-2t} \text{ e } y(t) = C_2 e^{-2t}.$$

Para particularizar as constantes C_1 e C_2, lembramos que o ponto de partida do alpinista, correspondente a $t = 0$, é $P_0(4, 3, 0)$.

Portanto,

$x(0) = 4$ e $y(0) = 3$ e dessa forma, $C_1 = 4$ e $C_2 = 3$. Logo, a projeção de $\vec{r}(t)$ é $\vec{r}_1(t) = \left(4e^{-2t},\ 3e^{-2t}\right)$ e a trajetória é dada por

$$\vec{r}(t) = \left(4e^{-2t},\ 3e^{-2t},\ 25 - \left(4e^{-2t}\right)^2 - \left(3e^{-2t}\right)^2\right)$$

$$= \left(4e^{-2t},\ 3e^{-2t},\ 25 - 25e^{-4t^2}\right).$$

A Figura 4.19 ilustra este exemplo.

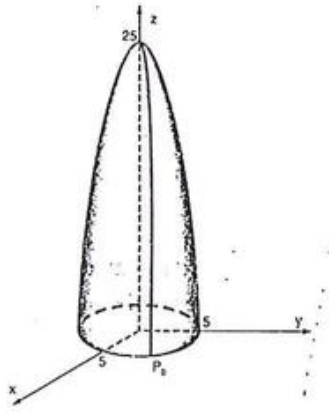


Figura 4.19

(iii) A Figura 4.20 mostra as curvas de nível da temperatura $T(x, y)$ da superfície do oceano, de uma determinada região do globo terrestre. Supondo que $T(x, y)$ é aproximadamente igual a $x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$, pergunta-se:

a) Qual é a taxa de variação da temperatura nos pontos $P_0(2, 3)$ e $P_1(4, 1)$, na direção nordeste?

b) Se não conhecermos a forma da função $T(x, y)$, como podemos encontrar um valor aproximado para a taxa de variação do item (a)?

c) Qual é a taxa máxima de variação da temperatura em P_0?

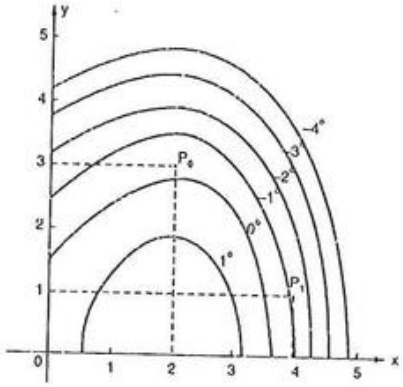


Figura 4.20

Solução de (a). A taxa de variação da temperatura é dada pela derivada direcional. Considerando que um vetor unitário na direção nordeste é $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, e que $\text{grad } f = \left(1 - \frac{1}{4}x^2,\ \frac{-1}{2}y\right)$, vem

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial s}(2,\ 3) = \nabla f(2,\ 3).\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}.4,\ \frac{-1}{2}.3\right).\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P_1) = \frac{\partial f}{\partial s}(4,\ 1) = \nabla f(4,\ 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{-7}{2\sqrt{2}}.$$

Solução de (b). Se não conhecermos a forma da função $T(x, y)$, podemos calcular a taxa de variação média da temperatura na direção nordeste no ponto P_0. Basta observar a Figura 4.20 e assinalar as temperaturas a nordeste: $-1°$, e a sudoeste: $0°$. A seguir faz-se o quociente

$$\frac{-1° - 0°}{1 \text{ km}},$$

onde 1 km é a distância aproximada entre os dois pontos cujas temperaturas foram observadas.

Portanto, -1 grau/km é o valor aproximado da taxa de variação da temperatura, em P_0, na direção nordeste.

Analogamente, temos que

$\frac{-2° - (-1°)}{0{,}4 \text{ km}} = -2{,}5$ grau/km é o valor aproximado da taxa de variação da temperatura em P_1, na direção nordeste.

Observamos que os valores encontrados em (a) são aproximadamente os mesmos encontrados em (b).

Solução de (c). A taxa máxima de variação da temperatura em P_0 é dada por

$$|\text{grad } f(P_0)| = \sqrt{0 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

(iv) Encontrar a equação da reta tangente à curva $x^2 + y^2 = 4$ no ponto $\left(\sqrt{3},\ 1\right)$, usando o gradiente.

Solução. Analisando a Figura 4.21, vemos que a equação da reta tangente a uma curva de nível $f(x, y) = k$, em um ponto $P_0(x_0, y_0)$, pode ser encontrada através da equação

$$\nabla f(P_0) \cdot [\vec{r} - \vec{r}_0] = 0,$$

onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$.

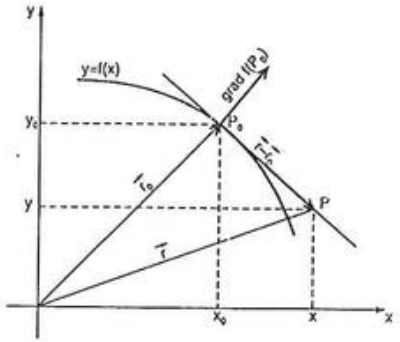


Figura 4.21

Neste exemplo, temos que $f(x,\ y) = x^2 + y^2$ e $P_0\left(\sqrt{3},\ 1\right)$.

Usando (2), vem

$$\nabla f\left(\sqrt{3},\ 1\right) \cdot \left[(x,\ y) - \left(\sqrt{3},\ 1\right)\right] = 0$$

$$\left(2\sqrt{3},\ 2\right) \cdot \left(x - \sqrt{3},\ y - 1\right) = 0$$

$$2\sqrt{3}\left(x - \sqrt{3}\right) + 2(y - 1) = 0$$

$$2\sqrt{3}\,x + 2y - 8 = 0.$$

Portanto, $2\sqrt{3}\,x + 2y - 8 = 0$ é a equação da reta tangente à curva $x^2 + y^2 = 4$, no ponto $\left(\sqrt{3},\ 1\right)$.

(v) Potencial de um campo elétrico.

Consideremos uma carga elétrica positiva Q, situada na origem do plano xy, conforme Figura 4.22.

Da Física, temos que o potencial V, a uma distância r da carga Q, é constante e é dado por

$$V = \frac{Q}{r}.$$

Assim, as curvas equipotenciais no plano xy, isto é, as curvas de potencial constante, são as circunferências de equação

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0.$$

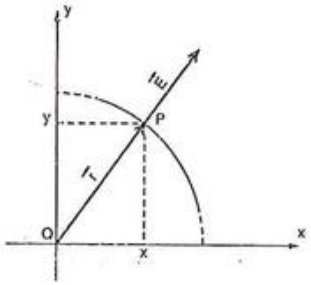


Figura 4.22

Seja $P(x, y)$ um ponto de uma curva equipotencial. Se colocamos em P uma carga unitária positiva q, esta sofrerá, segundo a lei de Coulomb, uma repulsão. O campo elétrico $\vec{E}$, gerado por Q, no ponto P, tem a direção do vetor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e sua intensidade é dada por

$$E = \frac{Q}{r^2}.$$

Podemos então dizer que a carga q sofre a ação do campo elétrico $\vec{E}$, que é dado por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ &= \frac{Q\vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{Qy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\vec{j}. \end{aligned} \tag{3}$$

Vamos agora determinar o gradiente do potencial V e compará-lo com (3).

Como o potencial V é

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{r} \\ &= \frac{Q}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{-Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\vec{i} - \frac{Qy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\vec{j} \\ &= -\vec{E}. \end{aligned}$$

Segue que, se conhecermos o potencial V, podemos determinar o campo elétrico $\vec{E}$, pela fórmula

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

Também podemos encontrar a taxa de variação do potencial V, na direção $\vec{r}$, no ponto P. Basta calcular a derivada direcional. Temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial s}(P) &= \nabla V(P) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ &= \left(\frac{-Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{-Qy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ &= \frac{-Qx^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{Qy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{-Q}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-Q}{r^2} \\ &= -|\vec{E}|. \end{aligned}$$

A expressão $\frac{\partial V}{\partial s}(P) = -|\vec{E}|$ nos mostra que o potencial V decresce à medida que nos afastamos da carga Q na direção do vetor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Visualizando o campo elétrico $\vec{E}$ representado na Figura 4.23, vemos que, para aumentar o potencial de uma carga positiva, é necessário deslocá-la em sentido contrário ao do campo elétrico.

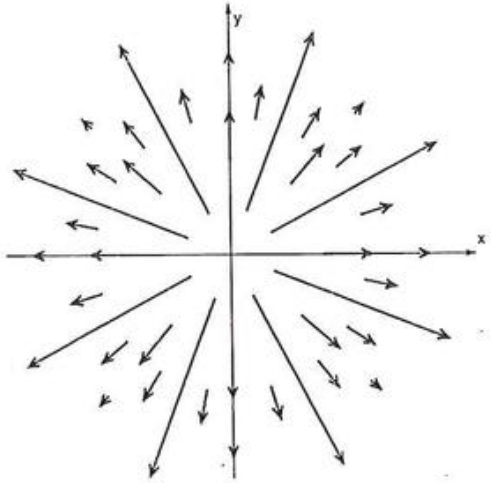


Figura 4.23

(vi) Um potencial elétrico é dado por $V = \frac{20}{x^2 + y^2}$. Achar a intensidade do campo elétrico no ponto (1, 0).

Conforme o exemplo anterior, temos

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

$$= \left(\frac{-20 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-20 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{-40x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-40y}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

$$\vec{E}(1, 0) = \operatorname{grad} V(1, 0)$$

$$= (-40, 0)$$

$$= -40\,\vec{i}.$$

Portanto,

$$E = |\vec{E}| = |-40\,\vec{i}| = 40.$$

4.6 EXERCÍCIOS

1. Calcular, usando a definição, a derivada direcional do campo escalar $f(x, y)$ no ponto indicado e na direção $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

   a) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$ em $P(1, 1)$.

   b) $f(x, y) = 2x + y$ em $P(-1, 2)$.

   c) $f(x, y) = e^{x+y}$ em $P(0, 1)$.

   Nos exercícios de 2 a 6, calcular, usando a definição, a derivada direcional no ponto e direção indicados:

2. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P(1, 2)$, na direção de $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

3. $f(x, y, z) = xy + z$, $P(2, 1, 0)$, na direção do eixo positivo dos z.

4. $f(x, y) = 2x + 3y$, $P(-1, 2)$, na direção da reta $y = 2x$.

5. $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$, $P(1, 1)$, na direção do vetor tangente unitário à curva C: $\vec{r}(t) = (t, t^2)$ em $P(1, 1)$.

6. $f(x, y, z) = 2x + 3y - z$, $P(1, 1, -1)$, na direção do eixo positivo dos y.

   Nos exercícios de 7 a 17, calcular o gradiente do campo escalar dado.

7. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

8. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$

9. $f(x, y) = 3xy^3 - 2y$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$

11. $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$

12. $f(x, y) = e^{2x^2 + y}$

13. $f(x, y) = \text{arc tg } xy$

14. $f(x, y) = \dfrac{2x}{x - y}$

15. $f(x, y, z) = 2xy + yz^2 + \ln z$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{\dfrac{x + y}{z}}$

17. $f(x, y, z) = ze^{x^2 - y}$

Nos exercícios de 18 a 24, representar geometricamente o campo gradiente definido pela função dada:

18. $u(x, y, z) = -\dfrac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)$

19. $u(x, y) = 2x + 4y$

20. $u(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$

21. $u(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2$

22. $u(x, y) = x^2 + y^2$

23. $u(x, y) = 2x - y$

24. $u(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$

25. Seja $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$. Representar geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$ sendo (x_0, y_0) dado por

a) $(1, 1)$ b) $(-1, 1)$ c) $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

26. Dados $A\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ e $B\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ e a função $f(x, y) = \ln xy$, determinar o ângulo formado pelos vetores $\nabla f(A)$ e $\nabla f(B)$.

27. Provar as propriedades (i), (ii) e (iv) da seção 4.4.3.

28. Determinar e representar graficamente um vetor normal à curva dada no ponto indicado:

a) $2x^2 + 3y^2 = 8$; $P\left(1, \sqrt{2}\right)$

b) $y = 2x^2$; $P(-1, 2)$

c) $x^2 + y^2 = 8$; $P(2, 2)$

d) $y = 5x - 2$; $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

29. Determinar um vetor normal à superfície dada no ponto indicado e representá-lo geometricamente:

a) $2x + 5y + 3z = 10$; $P(1, 2, \dfrac{-2}{3})$

b) $z = 2x^2 + 4y^2$; $P(0, 0, 0)$

c) $2z = x^2 + y^2$; $P(1, 1, 1)$.

30. Traçar as curvas de nível de $f(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$ que passem pelos pontos $(1, 1)$, $(1, -2)$ e $(-2, -1)$.

Traçar os vetores $\nabla f(1, 1)$, $\nabla f(1, -2)$ e $\nabla f(-2, -1)$.

Nos exercícios de 31 a 35, determinar uma equação para a reta normal à curva dada, nos pontos indicados:

31. $y = x^2$; $P_0(1, 1)$, $P_1(2, 4)$

32. $x^2 - y^2 = 1$; $P_0(\sqrt{2}, 1)$

33. $x - y^2 = -4$; $P_0(-3, 1)$

34. $x + y = 4$; $P_0(3, 1)$

35. $x^2 + y^2 = 4$; $P_0(2, 0)$

Nos exercícios de 36 a 40, determinar uma equação vetorial para a reta normal à superfície dada, nos pontos indicados:

36. $z = x^2 + y^2 - 1$, $P_0(1, 1, 1)$

37. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad P_0(1, 1, \sqrt{2}), \quad P_1(1, 1, -\sqrt{2})$

38. $x^2 + y^2 = z^2, \quad P_0(3, 4, 5)$

39. $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1, \quad P_0(1, 2, -3)$

40. $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1, \quad P_0\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

41. Calcular $\frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)$ na direção $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$:

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2; \quad (x_0, y_0) = (1, 2)$

b) $f(x, y) = e^{xy}; \quad (x_0, y_0) = (-1, 2)$

c) $f(x, y) = \frac{x + y}{1 - x}; \quad (x_0, y_0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

42. Calcular as derivadas direcionais das seguintes funções nos pontos e direções indicados:

a) $f(x, y) = e^{-x}\cos y$ em (0, 0) na direção que forma um ângulo de 45° com o eixo positivo dos x, no sentido anti-horário.

b) $f(x, y, z) = 4x^2 - 3y^2 + z$ em (−1, 2, 3) na direção da normal exterior à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, no ponto $P\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

Nos exercícios de 43 a 47, determinar a derivada direcional da função dada:

43. $f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + z$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

44. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, na direção de máximo crescimento de f.

45. $f(x, y) = x^2 + y^2$, na direção da semi-reta $y - x = 4, x \geq 0$.

46. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, na direção de máximo decrescimento de f.

47. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

48. A derivada direcional da função $\omega = f(x, y)$ em $P_0(1, 1)$ na direção do vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$, $P_1(1, 2)$, é 2, e na direção do vetor $\overrightarrow{P_0P_2}$, $P_2(2, 0)$, é 4. Quanto vale $\frac{\partial \omega}{\partial s}$ em P_0 na direção do vetor $\overrightarrow{P_0 0}$, onde 0 é a origem?

49. Em que direção devemos nos deslocar partindo de $Q(1, 1, 0)$ para obtermos a taxa de maior decréscimo da função $f(x, y) = (2x + y - 2)^2 + (5x - 2y)^2$?

50. Em que direção a derivada direcional de $f(x, y) = 2xy - x^2$ no ponto (1, 1) é nula?

51. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? Em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ em (1, 1)

b) $f(x, y) = e^{xy}$ em (2, −1).

52. Determinar os dois vetores unitários para os quais a derivada direcional de f no ponto dado é zero.

a) $f(x, y) = x^3y^3 - xy, \quad P(10, 10)$

b) $f(x, y) = \frac{x}{x + y}, \quad P(3, 2)$

c) $f(x, y) = e^{2x+y}, \quad P(1, 0)$.

53. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, derivada direcional igual a $\frac{2}{5}$ na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a $\frac{11}{5}$ na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcular:

a) $\nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\frac{\partial f}{\partial s}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ na direção $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.

54. Determinar a derivada direcional da função $z = \frac{(y - 1)^2}{x}$ no ponto $P_0\left(1, \sqrt{2}\right)$, na direção da normal exterior à elipse $2x^2 + 3y^2 = 8$ no ponto P_0.

Nos exercícios de 55 a 58, encontrar o valor máximo da derivada direcional do campo escalar dado, nos pontos indicados:

55. $f(x, y) = xy^2 - (y - x)^2; \quad P_0(1, 1)$

56. $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2; \quad P_0(0, 0, 0)$ e $P_1(1, 2, 2)$

57. $f(x, y, z) = \cos x + \text{sen } y$; $P_0(x, y, z)$

58. $f(x, y) = \text{arc tg } \frac{y}{x}$, $P_0(-1, 1)$.

59. Dada a função $\omega = x^2 + y^2 + z^2$, determinar sua derivada direcional no ponto $P(1, 1, \sqrt{2})$, na direção da normal exterior à superfície $z^2 = x^2 + y^2$ em P.

60. Admita que $T(x, y) = 4 - 2x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determinar uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir de (1, 2), sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

61. A Figura 4.24 mostra uma plataforma retangular, cuja temperatura em cada ponto é dada por $T(x, y) = 2x + y$. Um indivíduo encontra-se no ponto P_0 desta plataforma e necessita esquentar-se o mais rápido possível. Determinar a trajetória (obter uma equação) que o indivíduo deve seguir, esboçando-a sobre a plataforma.

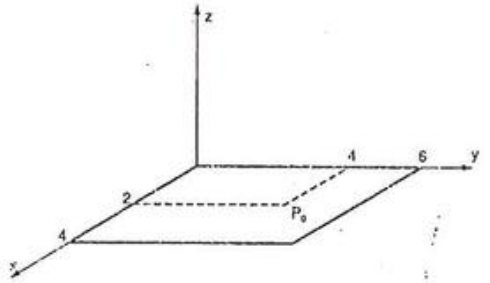


Figura 4.24

62. Uma plataforma retangular é representada no plano xy por

$$0 \leq x \leq 15 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 10$$

A temperatura nos pontos da plataforma é dada por $T(x, y) = x + 3y$. Suponhamos que duas partículas P_1 e P_2 estejam localizadas nos pontos (1, 1) e (3, 7), respectivamente.

a) Se a partícula P_1 se deslocar na direção em que se esquentará mais rapidamente e a partícula P_2 se deslocar na direção em que se esfriará mais rapidamente, elas se encontrarão?

b) Obter uma equação para a trajetória da partícula P_1, representando-a sobre a plataforma.

63. Resolver o exercício 62 supondo que a temperatura seja dada por

$$T(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 100.$$

64. A densidade de uma distribuição de massa varia em relação a uma origem dada segundo a fórmula $\rho = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$.

Achar a razão de variação da densidade no ponto (1, 2) na direção que forma um ângulo de 45°, no sentido anti-horário, com o eixo positivo dos x. Em que direção a razão de variação é máxima?

65. Usando o gradiente, encontrar uma equação para a reta tangente à curva $x^2 - y^2 = 1$, no ponto $(\sqrt{2}, 1)$.

66. Encontrar o vetor intensidade elétrica $\vec{E} = -\text{grad } V$ a partir da função potencial V, no ponto indicado.

a) $V = 2x^2 + 2y^2 - z^2$; $P(2, 2, 2)$

b) $V = e^y \cos x$; $P\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$

c) $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$; $P(1, 2, -2)$.

67. Um potencial elétrico é dado por $V = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2}$. Determinar o campo elétrico, representando-o graficamente.

4.7 DERIVADA DIRECIONAL DE UM CAMPO VETORIAL

4.7.1 Definição

Consideremos um campo vetorial

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}.$$

Escolhemos um ponto P no espaço e uma direção em P, dada por um vetor unitário $\vec{b}$. Seja C uma semi-reta, cuja origem é P e possui a direção de $\vec{b}$ e seja Q um ponto sobre C cuja distância de P é s (ver Figura 4.9). Se existir o limite

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{\vec{f}(Q) - \vec{f}(P)}{s}, \tag{1}$$

ele é chamado a derivada direcional de $\vec{f}$ em P, na direção de $\vec{b}$.

Usando as componentes de $\vec{f}$, reescrevemos (1) como,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{\left(f_1(Q)\vec{i} + f_2(Q)\vec{j} + f_3(Q)\vec{k}\right) - \left(f_1(P)\vec{i} + f_2(P)\vec{j} + f_3(P)\vec{k}\right)}{s}$$

$$= \left(\lim_{s \to 0} \frac{f_1(Q) - f_1(P)}{s}\right)\vec{i} + \left(\lim_{s \to 0} \frac{f_2(Q) - f_2(P)}{s}\right)\vec{j} + \left(\lim_{s \to 0} \frac{f_3(Q) - f_3(P)}{s}\right)\vec{k} \tag{2}$$

Observando (2), concluímos que a derivada direcional de $\vec{f}$ em um ponto P existe, se e somente se, existem as derivadas direcionais das funções escalares f_1, f_2 e f_3. Neste caso temos

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(P) = \frac{\partial f_1}{\partial s}(P)\vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial s}(P)\vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial s}(P)\vec{k}.$$

Usando os resultados obtidos na Seção 4.4.6, podemos escrever

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(P) = \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_1(P)\right]\vec{i} + \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_2(P)\right]\vec{j} + \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_3(P)\right]\vec{k}. \tag{3}$$

Se $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, podemos reescrever (3), como

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(P) = \left[(b_1, b_2, b_3) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(P), \frac{\partial f_1}{\partial y}(P), \frac{\partial f_1}{\partial z}(P)\right)\right]\vec{i} +$$

$$\left[(b_1, b_2, b_3) \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(P), \frac{\partial f_2}{\partial y}(P), \frac{\partial f_2}{\partial z}(P)\right)\right]\vec{j} +$$

$$\left[(b_1, b_2, b_3) \cdot \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}(P), \frac{\partial f_3}{\partial y}(P), \frac{\partial f_3}{\partial z}(P)\right)\right]\vec{k}$$

$$= \left[b_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) + b_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) + b_3 \frac{\partial f_1}{\partial z}(P)\right]\vec{i} +$$

$$\left[b_1 \frac{\partial f_2}{\partial x}(P) + b_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) + b_3 \frac{\partial f_2}{\partial z}(P)\right]\vec{j} +$$

$$\left[b_1 \frac{\partial f_3}{\partial x}(P) + b_2 \frac{\partial f_3}{\partial y}(P) + b_3 \frac{\partial f_3}{\partial z}(P)\right]\vec{k}.$$

Ou, em notação matricial,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial s}(P) \\ \frac{\partial f_3}{\partial s}(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

A matriz que aparece em (4), formada pelas derivadas parciais das funções f_1, f_2, f_3, é conhecida como MATRIZ JACOBIANA. Ela aparece em diversas ocasiões dentro de um curso de "Cálculo Diferencial e Integral". No Capítulo VI, voltaremos a usá-la para fazer transformação de variáveis no cálculo de Integrais de Superfície.

4.7.2 Exemplos

(i) Encontrar a derivada direcional em $P(2, 1)$, do campo vetorial radial

$$\vec{f}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}, \text{ na direção do vetor } \vec{a} = \vec{i} - \vec{j}.$$

Solução. Usando (3), temos

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(2, 1) = \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_1(2, 1)\right]\vec{i} + \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_2(2, 1)\right]\vec{j}.$$

Como $\vec{b} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$;

$f_1 = x$; grad $f_1(2, 1) = \vec{i}$;

$f_2 = y$ e grad $f_2(2, 1) = \vec{j}$, vem

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(2, 1) = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right).\vec{i}\right]\vec{i} + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right).\vec{j}\right]\vec{j}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

(ii) Seja $\vec{f}(x, y) = x^2\vec{i} - y^2\vec{j}$.

a) Mostrar que o módulo da derivada direcional de $\vec{f}(x, y)$, no ponto (1, 1), é igual a 2, para qualquer direção no plano xy.

b) Encontrar a direção no plano xy, na qual $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right|$ tem valor máximo.

Solução de (a). Uma direção no plano xy pode ser expressa pelo vetor unitário

$\vec{b} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$, conforme Figura 4.25.

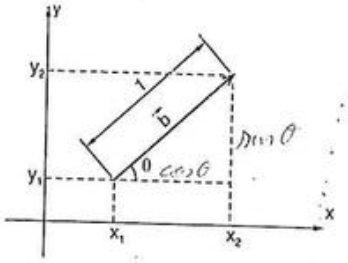


Figura 4.25

Usando (3), vem

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 1) = \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_1(1, 1)\right]\vec{i} + \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_2(1, 1)\right]\vec{j}.$$

Como $f_1 = x^2$; grad $f_1(1, 1) = 2\vec{i}$;

$f_2 = -y^2$ e grad $f_2(1, 1) = -2\vec{j}$, temos

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 1) = \left[\left(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right).2\vec{i}\right]\vec{i} + \left[\left(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right).(-2\vec{j})\right]\vec{j}$$

$$= 2\cos\theta\,\vec{i} - 2\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}.$$

Portanto,

$$\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 1)\right| = \sqrt{4\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= 2, \text{ para toda direção no plano } xy.$$

Solução de (b). Para encontrar a direção no plano xy, na qual $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right|$ tem valor máximo, vamos inicialmente calcular $\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)$, na direção de $\vec{b} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$. Temos,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2) = \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_1(1, 2)\right]\vec{i} + \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_2(1, 2)\right]\vec{j}$$

$$= \left[\left(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right) \cdot 2\vec{i}\right]\vec{i} + \left[\left(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right) \cdot (-4\vec{j})\right]\vec{j}$$

$$= 2\cos\theta\,\vec{i} - 4\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}.$$

$$\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right| = \sqrt{4\cos^2\theta + 16\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= 2\sqrt{\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Devemos encontrar, agora, o valor máximo de

$$g(\theta) = 2\sqrt{\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Derivando $g(\theta)$, vem

$$g'(\theta) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta\right)^{-1/2} \cdot (-2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{6\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Igualando $g'(\theta) = 0$, temos $6 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0$, e então, $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$ são pontos críticos de g. Para $\theta = 0$, temos

$\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right| = 2$; para $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right| = 4$; para $\theta = \pi$ temos

$\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right| = 2$ e para $\theta = \frac{3\pi}{2}$ temos $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right| = 4$.

Portanto, o valor máximo de $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right|$ ocorre para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Dessa forma, a direção no plano xy, na qual $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2)\right|$ tem valor máximo, é dada por

$$\vec{b} = \pm\vec{j}.$$

(iii) Calcular a derivada direcional da função

$\vec{f}(x, y, z) = e^x\vec{i} + e^x\vec{j} + e^z\vec{k}$ no ponto $P(1, 2, 2)$, na direção do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Neste exemplo, usaremos a notação matricial. Temos,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(1, 2, 2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s}(1, 2, 2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial s}(1, 2, 2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial s}(1, 2, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2e}{\sqrt{6}} \\ \frac{-e^2}{\sqrt{6}} \\ \frac{e^2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2e}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{e^2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{e^2}{\sqrt{6}}\vec{k}.$$

4.7.3 Interpretação Física

Consideremos um fluido movendo-se em uma região D, em regime estacionário, isto é, a velocidade em qualquer ponto $P(x, y, z)$ é independente do tempo. Então, a cada ponto $P \in D$, está associado um vetor $\vec{v}(x, y, z)$, que é a velocidade do fluido em P (ver Figura 4.26).

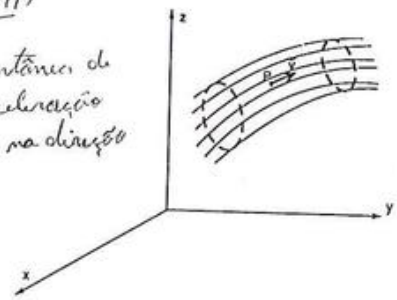


Figura 4.26

A derivada direcional de $\vec{v}$ em P, em uma direção dada $\vec{b}$, expressa a variação da velocidade do fluido, em P, na direção $\vec{b}$.

4.7.4 Exemplo

Seja $\vec{v}(x, y, z) = x^2\vec{i} + 2y^2\vec{j} + z\vec{k}$, a função vetorial que define a velocidade de um determinado fluido, em um ponto $P(x, y, z)$ do espaço. Determinar a variação da velocidade do fluido na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$, em $P(1, 1, 2)$.

O vetor unitário na direção dada é

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

Em $P(1, 1, 2)$, a aceleração na direção de $\vec{b}$ é dada por $\frac{\partial \vec{v}}{\partial s}(1, 1, 2)$.

Temos,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s}(1, 1, 2) = \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_1(1, 1, 2)\right]\vec{i} + \left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_2(1, 1, 2)\right]\vec{j} +$$

$$\left[\vec{b} \cdot \text{grad } f_3(1, 1, 2)\right]\vec{k}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right) \cdot (2\vec{i})\right]\vec{i} + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right) \cdot 4\vec{j}\right]\vec{j} +$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right) \cdot \vec{k}\right]\vec{k}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

4.8 DIVERGÊNCIA DE UM CAMPO VETORIAL

4.8.1 Definição

Seja $\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$ um campo vetorial definido em um domínio D. Se existem e são contínuas as derivadas $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_3}{\partial z}$, definimos a divergência do campo vetorial $\vec{f}$, denotada por div $\vec{f}$, como a função escalar

$$\text{div } \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \qquad (1)$$

Podemos interpretar (1) como

$$\text{div } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}\right).$$

Quando usamos esta simbologia, entendemos que o produto $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot f_1$ representa $\frac{\partial f_1}{\partial x}$.

Analogamente, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y}$ e $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot f_3 = \frac{\partial f_3}{\partial z}$.

4.8.2 Exemplo

Dado o campo vetorial $\vec{f}(x, y, z) = 2x^4\vec{i} + e^{xy}\vec{j} + xyz\,\vec{k}$, calcular div $\vec{f}$.

Aplicando (1), temos

$$\text{div } \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^4) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz)$$

$$= 8x^3 + xe^{xy} + xy.$$

4.8.3 Propriedades

Sejam $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ e $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ funções vetoriais definidas em um domínio D e suponhamos que div $\vec{f}$ e div $\vec{g}$ existem. Então:

a) $\text{div}\left(\vec{f} \pm \vec{g}\right) = \text{div } \vec{f} \pm \text{div } \vec{g}$

b) $\text{div}\left(h\vec{f}\right) = h \,\text{div}\,\vec{f} + \text{grad } h \cdot \vec{f}$, onde $h = h(x, y, z)$ é uma função escalar diferenciável em D.

Prova do item (b). Temos,

$$\text{div}\left(h\vec{f}\right) = \text{div}\,(hf_1, hf_2, hf_3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(hf_1) + \frac{\partial}{\partial y}(hf_2) + \frac{\partial}{\partial z}(hf_3)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x} f_1 + h \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} f_2 + h \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} f_3 + h \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$= h\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x} f_1 + \frac{\partial h}{\partial y} f_2 + \frac{\partial h}{\partial z} f_3\right)$$

$$= h \operatorname{div} \vec{f} + \operatorname{grad} h \cdot \vec{f}.$$

Supondo que existam as derivadas de 2ª ordem de f, podemos determinar div (grad f).

Como $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$,

temos

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \qquad (2)$$

Usando o operador ∇ na expressão (2), reescrevemos

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f$$

$$= \nabla^2 f,$$

onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

O operador diferencial ∇^2 é chamado Laplaciano e é muito usado na Física. A equação

$$\nabla^2 f = 0 \qquad (3)$$

é chamada equação de Laplace.

4.8.4 Interpretação Física da Divergência

Na Mecânica dos Fluidos, encontramos a Equação da Continuidade

$$\operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad (4)$$

onde $\vec{u} = \rho\vec{v}$, sendo $\rho = \rho(x, y, z, t)$ a densidade do fluido e $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ o vetor velocidade.

Reescrevendo a equação (4) na forma $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{u}$, vemos que a divergência de um campo vetorial surge como uma medida da taxa de variação da densidade do fluido em um ponto.

Quando a divergência é positiva em um ponto do fluido, a sua densidade está diminuindo com o tempo. Neste caso, dizemos que o fluido está se expandindo, ou ainda, que existe uma fonte de fluxo no ponto.

Quando a divergência é negativa, vale o oposto.

Se a divergência é zero em todos os pontos de uma região, o fluxo de entrada na região é exatamente equilibrado pelo de saída. O fluxo não é criado nem destruído, ou seja, não existe fonte nem sumidouro na região.

Se ρ = constante, isto é, a densidade não é função das coordenadas x, y, z e nem do tempo t, dizemos que o fluido é incompressível. Neste caso, a equação da continuidade toma a forma $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, e o campo vetorial $\vec{v}$ é chamado solenoidal.

4.8.5 Exemplos

(i) Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade $\vec{v} = x\vec{j}$. Mostrar que todas as partículas se deslocam em linha reta e que o campo de velocidades dado representa um possível escoamento incompressível.

Solução. Analisando a representação gráfica do campo vetorial $\vec{v}$ (ver Figura 4.27), concluímos que todas as partículas se deslocam em linha reta.

Para verificar que $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível devemos mostrar que o campo de velocidade $\vec{v}$ satisfaz a equação

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Temos,

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(0)$$

$$= 0.$$

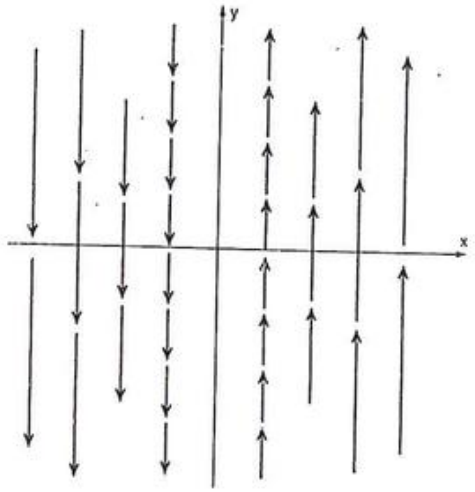


Figura 4.27

(ii) Um campo de escoamento compressível é descrito por

$$\vec{u} = \rho\vec{v} = 2xe^{-t}\,\vec{i} - xye^{-t}\,\vec{j},$$

onde x e y são coordenadas em metro, t é o tempo em segundos, ρ e $\vec{v}$ em kg/m³ e m/s, respectivamente. Calcular a taxa de variação da densidade ρ em relação ao tempo, no ponto $P(3, 2, 2)$, para $t = 0$.

Solução. Usando a equação (4), vem

$$\operatorname{div}\left(2xe^{-t}\,\vec{i} - xye^{-t}\,\vec{j}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$2e^{-t} - xe^{-t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = xe^{-t} - 2e^{-t}.$$

Para $t = 0$, temos

$\frac{\partial\rho}{\partial t} = x - 2$ e portanto, no ponto $P(3, 2, 2)$, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 1$ kg/m³.s.

(iii) Quando uma função escalar $f(x, y, z)$ tem derivadas de 2ª ordem contínuas e div grad $f = 0$ em um domínio, ela é chamada harmônica nesse domínio. Verificar se as seguintes funções são harmônicas:

a) $f(x, y, z) = x^2y + e^y - z$

b) $f(x, y, z) = 2xy + yz$.

Solução. De (3) e da definição de função harmônica, concluímos que uma função f é harmônica se e, somente se, f é solução da equação de Laplace.

Basta, portanto, fazer essa verificação.

a) Para $f(x, y, z) = x^2y + e^y - z$, temos

$$\nabla f = (2xy,\ x^2 + e^y,\ -1);$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + e^y\right) + \frac{\partial}{\partial z}(-1)$$

$$= 2y + e^y + 0$$

$$= 2y + e^y \neq 0.$$

Portanto, $f(x, y, z) = x^2y + e^y - z$ não é uma função harmônica.

b) Para $f(x, y, z) = 2xy + yz$, temos

$$\nabla f = (2y,\ 2x + z,\ y) \quad \text{e}$$

$$\nabla^2 f = 0.$$

Portanto, $f(x, y, z) = 2xy + yz$ é uma função harmônica.

(iv) Verificar que a equação da continuidade

$$\operatorname{div}\vec{u} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

pode ser escrita como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{grad}\rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0.$$

Solução. Conforme vimos em 4.8.4, $\vec{u} = \rho\vec{v}$, onde $\rho = \rho(x, y, z, t)$ é a densidade de um fluido e $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ o vetor velocidade.

Considerando $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div} \rho\, \vec{v} \\
&= \operatorname{div} \rho(v_1, v_2, v_3) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_3) \\
&= \rho \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_3}{\partial z} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&= \rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) + \left(v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \\
&= \rho \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{grad} \rho \,.\, \vec{v}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

pode ser reescrito como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \,.\, \vec{v} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

4.9 ROTACIONAL DE UM CAMPO VETORIAL

4.9.1 Definição

Seja $\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$ um campo vetorial definido em um domínio D, com derivadas de 1ª ordem contínuas em D. Definimos o rotacional de $\vec{f}$, denotado por rot $\vec{f}$, como

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{f} &= \nabla \times \vec{f} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}.
\end{aligned}$$

4.9.2 Exemplo

Determinar rot $\vec{f}$, sendo

$$\vec{f} = xzy^2\,\vec{i} + xyz\vec{j} + 3xy\,\vec{k}.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{f} &= \nabla \times \vec{f} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xzy^2 & xyz & 3xy \end{vmatrix} \\
&= (3x - xy)\vec{i} + (xy^2 - 3y)\vec{j} + (yz - 2xzy)\vec{k}.
\end{aligned}$$

4.9.3 Propriedades

Sejam $\vec{f}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3)$ e $\vec{g}(x, y, z) = (g_1, g_2, g_3)$ funções vetoriais definidas em um domínio D com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em D. Então:

a) $\operatorname{rot}(\vec{f} + \vec{g}) = \operatorname{rot} \vec{f} + \operatorname{rot} \vec{g}$

b) $\text{rot}\,(h\vec{f}) = h\ \text{rot}\ \vec{f} + \text{grad}\ h \times \vec{f}$

onde $h = h(x, y, z)$ é uma função escalar diferenciável em D.

Prova do item b. Temos,

$$\text{rot}\,(h\vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ hf_1 & hf_2 & hf_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(hf_3) - \frac{\partial}{\partial z}(hf_2)\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(hf_1) - \frac{\partial}{\partial x}(hf_3)\right)\vec{j} +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(hf_2) - \frac{\partial}{\partial y}(hf_1)\right)\vec{k}.$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial y} \cdot f_3 + h\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} \cdot f_2 - h\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z} \cdot f_1 + h\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f_3 - h\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot f_2 + h\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \cdot f_1 - h\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= h\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial h}{\partial y}f_3 - \frac{\partial h}{\partial z}f_2\right)\vec{i} +$$

$$h\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial h}{\partial z}f_1 - \frac{\partial h}{\partial x}f_3\right)\vec{j} +$$

$$h\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}f_2 - \frac{\partial h}{\partial y}f_1\right)\vec{k}$$

$$= h\ \text{rot}\,\vec{f} + \text{grad}\ h \times \vec{f}.$$

4.9.4 Interpretação Física do Rotacional

O rotacional de um campo vetorial aparece em diversas situações da Física. Por exemplo:

(i) Na análise de campos de velocidade na Mecânica dos Fluidos;

(ii) Na análise de campos de forças eletromagnéticos;

(iii) Pode ser interpretado como uma medida do movimento angular de um fluido e a condição

$$\text{rot}\ \vec{v} = \vec{0},$$

para um campo de velocidades $\vec{v}$, caracteriza os chamados fluxos irrotacionais;

(iv) A equação $\text{rot}\ \vec{E} = \vec{0}$, onde $\vec{E}$ é força elétrica, caracteriza que somente forças eletrostáticas estão presentes no campo elétrico.

Nos próximos capítulos, voltaremos a explorar essas idéias físicas.

4.9.5 Exemplos

(i) Um corpo rígido gira em torno de um eixo que passa pela origem do sistema de coordenadas, com vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ constante. Seja $\vec{v}$ o vetor velocidade em um ponto P do corpo. Calcular $\text{rot}\ \vec{v}$.

Solução. A Figura 4.28 ilustra este exemplo.

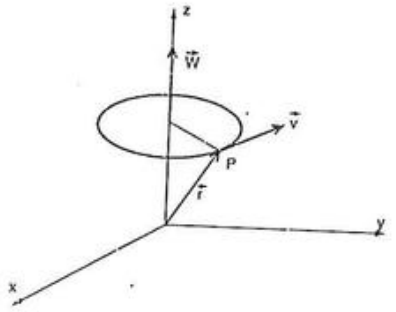


Figura 4.28

Da Física, sabemos que o vetor velocidade em um ponto P do corpo é dado por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto P.

Fazendo $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ e $\vec{r} = (x, y, z)$, temos

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (\omega_2 z - \omega_3 y)\vec{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\vec{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\vec{k}.$$

Portanto,

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$$

$$= (\omega_1 + \omega_1)\vec{i} + (\omega_2 + \omega_2)\vec{j} + (\omega_3 + \omega_3)\vec{k}$$

$$= 2\omega_1 \vec{i} + 2\omega_2 \vec{j} + 2\omega_3 \vec{k}$$

$$= 2\vec{\omega}.$$

(ii) Um escoamento é representado pelo campo de velocidade

$$\vec{v} = 10x\,\vec{i} - 10y\,\vec{j} + 30\,\vec{k}.$$

Verificar se o escoamento é:

a) um possível escoamento incompressível;

b) irrotacional.

Solução de (a). De acordo com 4.8.4 devemos verificar se div $\vec{v} = 0$.

Temos,

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(10x) + \frac{\partial}{\partial y}(-10y) + \frac{\partial}{\partial z}(30)$$

$$= 10 - 10$$

$$= 0.$$

Logo, temos um possível escoamento incompressível.

Solução de (b). Devemos verificar se rot $\vec{v} = 0$.

Temos,

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 10x & -10y & 30 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{0}.$$

Logo, o escoamento é irrotacional.

(iii) Para um escoamento no plano xy, a componente em y da velocidade é dada por $y^2 - 2x + 2y$. Determinar uma possível componente em x para escoamento incompressível.

Solução. Para um escoamento no plano xy incompressível, devemos ter

$$\text{div } \vec{v} = 0, \text{ onde } \vec{v} = v_1\vec{i} + (y^2 - 2x + 2y)\vec{j}.$$

Temos,

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 2x + 2y)$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2y + 2.$$

Resolvendo a equação

$\frac{\partial v_1}{\partial x} + 2y + 2 = 0$ encontramos uma possível componente em x, isto é,

$$v_1 = \int (-2y - 2)\, dx + a(y)$$

$$= -2yx - 2x + a(y),$$

onde $a(y)$ é qualquer função em y.

(iv) No Exemplo 4.5 (v) vimos que o campo eletrostático associado a uma carga positiva Q é dado por $\vec{E} = -\nabla V$, onde $V = \frac{Q}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Verificar que rot $\vec{E} = 0$.

Solução. Podemos escrever

$$\vec{E} = \left(\frac{Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{Qy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 0 \right), \text{ e então}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & \frac{Qy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \left(\frac{-3\,Qxy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{3\,Qxy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \vec{k}$$

$$= \vec{0}, \text{ em todos os pontos fora da origem.}$$

4.10 CAMPOS CONSERVATIVOS

4.10.1 Definição

Seja $\vec{f}$ um campo vetorial em um domínio U. Se $u = u(x, y, z)$ é uma função diferenciável em U tal que

$$\vec{f} = \text{grad } u,$$

dizemos que $\vec{f}$ é um campo conservativo ou um campo gradiente em U. A função u é chamada função potencial de $\vec{f}$ em U.

4.10.2 Exemplo

O campo vetorial

$$\vec{f} = (4x + 5yz)\vec{i} + 5xz\vec{j} + 5xy\vec{k}$$

é um campo conservativo, pois a função $u = 2x^2 + 5xyz$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e o seu gradiente é $\vec{f}$. Portanto, u é uma função potencial para $\vec{f}$.

4.10.3 Teorema

Seja $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ um campo vetorial contínuo em um domínio U, com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em U. Se $\vec{f}$ admite uma função potencial u, então

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{0} \text{ para qualquer } (x, y, z) \in U. \tag{1}$$

Reciprocamente, se U for simplesmente conexo e (1) for verificada, então $\vec{f}$ admite uma função potencial $u = u(x, y, z)$ em U.

Observamos que (1) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}. \tag{2}$$

Prova Parcial. Provaremos apenas a condição necessária. A prova da condição suficiente será omitida.

Seja $u = u(x, y, z)$ uma função potencial para $\vec{f}$, em U. Então u é diferenciável em U e

$$\vec{f} = \text{grad } u,$$

isto é,

$$f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Temos, então

$$f_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ f_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad f_3 = \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{3}$$

Derivando ambos os membros da primeira igualdade de (3) em relação a y, temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Derivando ambos os membros da segunda igualdade de (3) em relação a x, temos

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Como as derivadas de $\vec{f}$ são contínuas em U, usando o Teorema de Schwarz concluímos que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Analogamente, obtemos as demais igualdades de (2).

4.10.4 Exemplos

Usando o Teorema 4.10.3, o que podemos afirmar a respeito dos seguintes campos vetoriais $\vec{f}$ em D?

a) $\vec{f} = 2x^2y\,\vec{i} + 5xz\,\vec{j} + x^2y^2\,\vec{k}$ em $D = \mathbb{R}^3$.

b) $\vec{f} = (4xy + z)\vec{i} + 2x^2\vec{j} + x\vec{k}$ em $D = \mathbb{R}^3$.

c) $\vec{f} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$ em

$$D_1 = \{(x, y) \mid (x - 3)^2 + y^2 < 1\} \text{ e } D_2 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 16\}.$$

Solução de (a). Calculando as derivadas parciais, temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2x^2 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 5z,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = 2xy^2,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 5x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 2x^2y.$$

Portanto, rot $\vec{f} \neq 0$ e dessa forma $\vec{f}$ não é um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$.

Solução de (b). Neste exemplo, o campo dado é contínuo com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em $\mathbb{R}^3$. Além disso,

$$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4xy + z & 2x^2 & x \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0)\vec{i} + (1 - 1)\vec{j} + (4x - 4x)\vec{k}$$

$$= \vec{0}.$$

Portanto, $\vec{f}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$.

Solução de (c). Calculando as derivadas parciais, temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Além disso, essas derivadas são contínuas em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$. Porém, como o campo $\vec{f}$ e suas derivadas não estão definidos na origem, devemos tomar muito cuidado ao analisar o domínio.

A Figura 4.29 mostra os domínios D_1 e D_2.

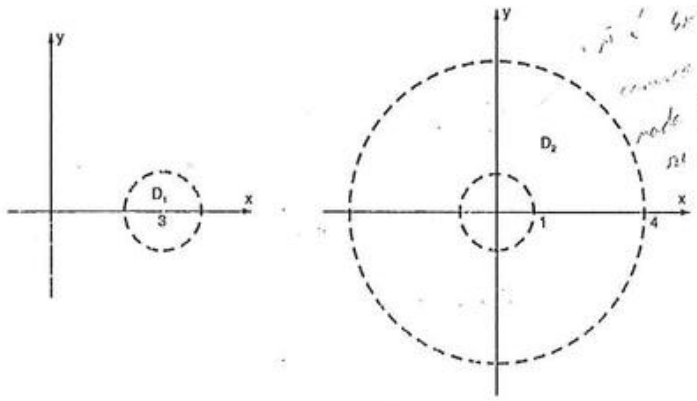


Figura 4.29

Podemos observar que D_1 é um domínio simplesmente conexo, que não contém a origem. Portanto, usando o Teorema 4.10.3, concluímos que $\vec{f}$ é conservativo em D_1.

O domínio D_2 também não contém a origem. Mas ele apresenta um "buraco". Não é simplesmente conexo. Assim, usando o Teorema 4.10.3, nada podemos concluir sobre a existência de uma função potencial para $\vec{f}$, em D_2.

— No próximo capítulo, veremos que $\vec{f}$ não é conservativo em D_2.

4.10.5 Cálculo de uma função potencial

Supondo que $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ é o gradiente de uma função potencial u em um domínio $U \subset \mathbb{R}^3$, podemos determinar u, usando as igualdades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_2 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial z} = f_3.$$

Os exemplos que seguem, nos mostram o procedimento a ser adotado.

4.10.6 Exemplos

(i) Verificar se o campo vetorial

$$\vec{f} = (yz + 2)\vec{i} + (xz + 1)\vec{j} + (xy + 2z)\vec{k}$$

é um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, encontrar uma função potencial u.

Solução. O campo vetorial $\vec{f}$ é um campo tal que f_1, f_2 e f_3 são funções contínuas que possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em $\mathbb{R}^3$.

Portanto, como

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = z,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = y \text{ e}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = x, \text{ concluímos que } \vec{f} \text{ admite uma função potencial } u \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Para determinar a função $u = u(x, y, z)$, vamos escrever

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 = yz + 2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 = xz + 1 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_3 = xy + 2z. \tag{6}$$

Integrando (4) em relação a x, vem

$$u = \int (yz + 2)\, dx$$

$$= xyz + 2x + a(y, z). \tag{7}$$

Deste resultado e da relação (5), escrevemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz + \frac{\partial a}{\partial y} = xz + 1.$$

Logo, $\dfrac{\partial a}{\partial y} = 1$

$$a = \int dy$$

$$= y + b(z).$$

Substituindo o valor de $a(y, z)$ na expressão (7), obtemos

$$u = xyz + 2x + y + b(z). \tag{8}$$

Deste resultado e de (6), vem

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy + \frac{db}{dz} = xy + 2z.$$

Logo, $\dfrac{db}{dz} = 2z$;

$$b = z^2 + c, \text{ onde } c \text{ é uma constante.}$$

Finalmente, substituindo o valor de b em (8), obtemos

$$u = xyz + 2x + y + z^2 + c.$$

Esta expressão representa uma família de funções. Para cada valor atribuído à constante c, obtemos uma função potencial do campo $\vec{f}$.

(ii) A lei da gravitação de Newton estabelece que a força $\vec{f}$ de atração entre duas partículas de massa M e m é dada por

$$\vec{f} = -GmM\, r^{-3}\vec{r}$$

onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $r = |\vec{r}|$. Encontrar o potencial newtoniano u, tal que

$$\vec{f} = \text{grad } u.$$

Solução. Inicialmente vamos reescrever $\vec{f}$,

$$\vec{f} = -GmM\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right).$$

Calculando as derivadas parciais, temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = 3\,GmMxy\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = 3\,GmMxz\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = 3\,GmMyz\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2}.$$

Salientamos que o campo $\vec{f}$ está definido em $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$. Como o domínio de definição de $\vec{f}$ é simplesmente conexo e (2) é verificado, usando o Teorema 4.10.3, podemos concluir que existe uma função potencial u.

Temos então,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -GmMx\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -GmMy\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -GmMz\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2}. \tag{11}$$

Integrando (9) em relação a x, obtemos

$$u = \int -GmMx\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} dx$$

$$= GmM\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} + a(y, z). \tag{12}$$

Derivando este resultado em relação a y e usando (10), vem

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 0 \text{ e então } a = b(z).$$

Logo, (12) pode ser reescrito como

$$u = GmM\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} + b(z).$$

Derivando este resultado em relação a z e usando (11), vem

$$\frac{db}{dz} = 0 \text{ e portanto } b \text{ é uma constante.}$$

Logo, o potencial de Newton é dado por

$$u = GmM\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + c.$$

4.11 ALGUMAS IDENTIDADES VETORIAIS

Usando o operador $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ representamos o gradiente de um campo escalar ϕ, $\nabla\phi$, o divergente de um campo vetorial $\vec{f}$, $\nabla . \vec{f}$, e o rotacional de $\vec{f}$, $\nabla \times \vec{f}$.

Listamos a seguir uma série de identidades vetoriais que podem facilmente ser verificadas.

Sejam $\vec{f}$ e $\vec{g}$ campos vetoriais, ϕ um campo escalar e $\vec{r}$ o vetor posição.

Então,

a) $(\vec{f} . \nabla)\phi = \vec{f} . (\nabla\phi)$

b) $(\vec{f} . \nabla)\vec{r} = \vec{f}$

c) $(\vec{f} \times \nabla)\phi = \vec{f} \times (\nabla\phi)$

d) $(\vec{f} \times \nabla) . \vec{g} = \vec{f} . (\nabla \times \vec{g})$

e) $\nabla . (\phi\vec{f}) = \phi\nabla . \vec{f} + \vec{f} . \nabla\phi$

f) $\nabla . (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} . (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} . (\nabla \times \vec{g})$

g) $\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{f}(\nabla . \vec{g}) - \vec{g}(\nabla . \vec{f}) + (\vec{g} . \nabla)\vec{f} - (\vec{f} . \nabla)\vec{g}$

h) $\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla . \vec{f}) - \nabla^2\vec{f}$.

Vamos verificar o item (f). Temos,

$$\vec{f} \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$$

$$= (f_2g_3 - f_3g_2)\vec{i} + (f_3g_1 - f_1g_3)\vec{j} + (f_1g_2 - f_2g_1)\vec{k}.$$

Portanto,

$$\nabla . (\vec{f} \times \vec{g}) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2g_3 - f_3g_2) + \frac{\partial}{\partial y}(f_3g_1 - f_1g_3) + \frac{\partial}{\partial z}(f_1g_2 - f_2g_1)$$

$$= f_2\frac{\partial g_3}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x}g_3 - f_3\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial x}g_2$$

$$+ f_3\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial y}g_1 - f_1\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}g_3$$

$$+ f_1\frac{\partial g_2}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z}g_2 - f_2\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial z}g_1$$

$$= g_1\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + g_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + g_3\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$+ f_1\left(\frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial y}\right) + f_2\left(\frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial z}\right) + f_3\left(\frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial x}\right)$$

$$= (g_1, g_2, g_3) . \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$- (f_1, f_2, f_3) . \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)$$

$$= \vec{g} . (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} . (\nabla \times \vec{g}).$$

4.12 EXERCÍCIOS

1. Encontrar a derivada direcional em P dos campos vetoriais dados, na direção do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

   a) $\vec{f}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 5y\vec{j} + 4\vec{k}$; $P(1, 1, 2)$

   b) $\vec{f}(x, y, z) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + z\vec{k}$; $P(0, 0, 0)$

   c) $\vec{f}(x, y, z) = e^{x+y}\vec{i} + e^{x-y}\vec{j} + 2\vec{k}$; $P(1, 1, 0)$.

2. Calcular a derivada direcional da função $\vec{f}(x, y, z) = \text{sen}x\,\vec{i} + \cos y\,\vec{j} + 2\vec{k}$ no ponto $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2\right)$, na direção do vetor $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

3. Encontrar a derivada direcional do campo vetorial dado, no ponto e direção indicados.

a) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$; $P_0(1, 1, 1)$; na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

b) $\vec{f}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$; $P_0(2, 1)$; na direção da semi-reta $y = 2x$, $x > 0$

c) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\vec{i} + ze^{xy}\vec{j}$; $P_0(1, 2, 2)$; na direção do vetor $\vec{i} + 2\vec{j}$

d) $\vec{f}(x, y) = e^x(\cos y\,\vec{i} + \text{sen}y\,\vec{j})$; $P_0(0, 0)$; na direção do vetor $\vec{i} - \vec{j}$.

4. Encontrar o módulo da derivada direcional do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$, no ponto $P_0(1, 1, 0)$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

5. Seja $\vec{f}(x, y) = 2x\vec{i} + y\vec{j}$. Encontrar a direção no plano xy, na qual $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(-1, 1)\right|$ tem valor máximo.

6. Encontrar a direção de máximo valor absoluto para a derivada $\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(P_0)$, sendo $\vec{f} = (x+y, 1)$ e $P_0 = (0, 0)$.

7. Mostrar que o valor absoluto da derivada direcional de $\vec{f}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é independente da direção dada no plano xy.

8. Seja $\vec{v}(x, y, z)$ o campo de velocidades de um fluido em movimento. Determinar a variação de $\vec{v}$ no ponto e direção indicados.

a) $\vec{v}(x, y, z) = (x, y, z)$; $P_0(1, 2, 1)$; na direção do vetor normal exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, no ponto $(1, 0, 0)$

b) $\vec{v}(x, y, z) = \left(2x, 2y, -\frac{1}{2}z\right)$; $P_0(1, 1, 2)$; na direção do vetor $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

c) $\vec{v}(x, y, z) = (-x^2, -y^2, z^2)$; $P_0(0, 0, 1)$; na direção do vetor $\vec{i} - 2\vec{k}$

d) $\vec{v}(x, y, z) = (2x, 2y, 2)$; $P_0(1, 1, 2)$; na direção do vetor $-\vec{k}$

e) $\vec{v}(x, y) = x\vec{j}$, $P_0(2, 2)$; na direção do vetor $\vec{i} + \vec{j}$.

9. Dado o campo vetorial $\vec{f}$, calcular div $\vec{f}$.

a) $\vec{f}(x, y) = 2x^4\vec{i} + e^{xy}\vec{j}$

b) $\vec{f}(x, y) = \text{sen}^2 x\,\vec{i} + 2\cos x\,\vec{j}$

c) $\vec{f}(x, y, z) = 2x^2y^2\,\vec{i} + 3xyz\,\vec{j} + y^2z\,\vec{k}$

d) $\vec{f}(x, y, z) = \ln xy\,\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$.

10. Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade $\vec{v}$ dada. Verificar se $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

a) $\vec{v} = z^2\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$

b) $\vec{v} = 2\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$

c) $\vec{v} = 2xy\vec{i} + x\vec{j}$.

11. Provar a propriedade (a) da seção 4.8.3.

12. Encontrar a divergência e o rotacional do campo vetorial dado.

a) $\vec{f}(x, y, z) = (2x + 4z, y - z, 3x - yz)$

b) $\vec{f}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$

c) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

d) $\vec{f}(x, y) = (e^x\cos y, e^x\text{sen}y)$

e) $\vec{f}(x, y, z) = (xyz^3, 2xy^3, -x^2yz)$

f) $\vec{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, $(x, y) \neq (0,0)$

g) $\vec{f}(x, y, z) = xy^2z\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$.

13. Determinar rot $\vec{f}$ sendo:

a) $\vec{f} = \text{sen}xy\,\vec{i} + \cos xy\,\vec{j} + z\vec{k}$

b) $\vec{f} = 2x^2y\,\vec{i} + 3xz\,\vec{j} - y\vec{k}$

c) $\vec{f} = (x + y)\,\vec{i} - \ln z\,\vec{k}$.

14. Provar a propriedade (a) da secção 4.9.3.

15. Sejam $\vec{f} = (xz,\ yz,\ xy)$ e $\vec{g} = (x^2,\ y^2,\ z^2)$. Determinar:

a) $\nabla \cdot \vec{f}$ b) $\nabla \cdot \vec{g}$

c) $\nabla \times \vec{f}$ d) $\nabla \times \vec{g}$

e) $\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g})$ f) $(\nabla \times \vec{f}) \times \vec{g}$

g) $(\nabla \times \vec{f}) \cdot (\nabla \times \vec{g})$.

16. Seja $\vec{u} = (x^2 - y^2) \cdot \nabla f$. Calcular div $\vec{u}$ no ponto $P(1, 2, 3)$ sendo:

a) $f = \text{sen}xy + x$

b) $f = xyz + 2xy$.

17. Se $f = 2x^3yz$ e $v = x^3\vec{i} + xz\vec{j} + \text{sen}x\vec{k}$, calcular:

a) $(\nabla f) +$ rot $\vec{v}$

b) div $(f\ \vec{v})$

c) rot $(f\ \vec{v})$

18. Sendo $\vec{u} = 2xz\vec{i} + (x^2 - z^2)\vec{j} + (x^2 + 2z)\vec{k}$, calcular rot (rot $\vec{u}$).

19. Supondo que $\vec{v}$ representa a velocidade de um fluido em movimento, verificar se $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

a) $\vec{v}(x, y) = (2y - 3)\vec{i} + x^2\vec{j}$

b) $\vec{v}(x, y, z) = (x, y, z)$

c) $\vec{v}(x, y, z) = (2x,\ -2y,\ 0)$

d) $\vec{v}(x, y) = (-y,\ x)$

e) $\vec{v}(x, y, z) = (2xz,\ -2yz,\ 2z)$.

20. Um fluido escoa em movimento uniforme no domínio $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 8\}$. Se a velocidade em cada ponto é dada por $\vec{v} = (y + 1)\vec{i}$, verificar que todas as partículas se deslocam em linha reta e que $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

21. Verificar se as seguintes funções são harmônicas em algum domínio.

a) $f(x, y, z) = xz + \ln xy$

b) $f(x, y) = 2(x^2 - y^2) + y + 10$

c) $f(x, y) = \text{sen}x \cosh y$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

e) $f(x, y, z) = x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2$

f) $f(x, y, z) = x + y + z$

g) $f(x, y) = e^x \cos y$.

22. Verificar se o campo dado é irrotacional.

a) $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

b) $\vec{f}(x, y, z) = (xyz, 2x-1, x^2z)$

c) $\vec{f}(x, y, z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$

d) $\vec{f}(x, y, z) = (2x + \cos yz, -xz\ \text{sen}yz, -xy\ \text{sen}yz)$

e) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

23. Um campo de escoamento compressível é descrito por $\vec{u} = \rho\vec{v} = xy\ \ln t\ \vec{i} + yt\vec{j}$ onde x e y são coordenadas em cm, e t é o tempo em seg, ρ e $\vec{v}$ em g/cm³ e cm/s, respectivamente. Calcular a taxa de variação da densidade ρ em relação ao tempo, no ponto $P(1, 2, 2)$, para $t = 2$ seg.

24. Um escoamento é representado pelo campo de velocidade $\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + xz\vec{j} + 2x^2y^2\vec{k}$.

Verificar se o escoamento é:

a) um possível escoamento incompressível;

b) irrotacional.

25. Para um escoamento no plano xy, a componente em x da velocidade é dada por $2xy + x^2 + y^2$. Determinar uma possível componente em y para escoamento incompressível.

26. Mostrar que se $f(x, y, z)$ é solução da equação de Laplace, ∇f é um campo vetorial que é ao mesmo tempo solenoidal e irrotacional.

27. Usando o Teorema 4.10.3, o que se pode afirmar sobre o campo vetorial dado?

a) $\vec{f}(x, y) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y)$ em $\mathbb{R}^2$

b) $\vec{f}(x, y) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$ em

$D = \{(x, y) \mid (x - 3)^2 + (y - 5)^2 < 3\}$

c) $\vec{f}(x, y) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$ em $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

d) $\vec{f}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$

em $D = \{(x, y, z) \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

e) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 \operatorname{sen} y + z,\ y \cos y + 1,\ z^2 - xy)$ em $\mathbb{R}^3$

f) $\vec{f}(x, y) = (x^2 + y, y^2 - x)$ em $\mathbb{R}^2$

g) $\vec{f}(x, y, z) = (-\operatorname{sen} x + \cos x, z, y)$ em $\mathbb{R}^3$

h) $\vec{f}(x, y) = (\operatorname{sen} x, \cos y)$ em $\mathbb{R}^2$.

28. Verificar se os seguintes campos vetoriais são conservativos em algum domínio. Em caso afirmativo, encontrar uma função potencial.

a) $\vec{f} = 2x\,\vec{i} + 5yz\,\vec{j} + x^2y^2z^2\,\vec{k}$

b) $\vec{f} = (1 + y \operatorname{sen} x)\,\vec{i} + (1 - \cos x)\vec{j}$

c) $\vec{f} = \ln xy\,\vec{i} + \ln yz\,\vec{j} + \ln zx\,\vec{k}$

d) $\vec{f} = \left(y^2 - 3 - \dfrac{y}{x^2 + xy} \right)\vec{i} + \left(\dfrac{1}{x + y} + 2xy + 2y \right)\vec{j}$

e) $\vec{f} = (10xz + y \operatorname{sen} xy)\vec{i} + x \operatorname{sen} xy\,\vec{j} + 5x^2\,\vec{k}$

f) $\vec{f} = e^x\vec{i} + 2e^x\vec{j} + 3e^z\vec{k}$.

29. Encontrar uma função potencial para o campo $\vec{f}$, no domínio especificado:

a) $\vec{f}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$

em qualquer domínio simplesmente conexo que não contém a origem.

b) $\vec{f}(x, y, z) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ em qualquer domínio simplesmente conexo que não contém a origem.

c) $\vec{f}(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$ em $\mathbb{R}^3$.

30. Verificar as identidades vetoriais (a), (b), (c), (d), (e), (g) e (h) de 4.11.

Snow666

Capítulo 5

INTEGRAIS CURVILÍNEAS

Neste capítulo apresentaremos definições, propriedades e aplicações das integrais curvilíneas, também chamadas integrais de linha.

5.1 INTEGRAIS DE LINHA DE CAMPOS ESCALARES

Nesta seção introduziremos o conceito de integral de linha de um campo escalar. Veremos que ela constitui uma generalização simples e natural do conceito de integral definida.

5.1.1 Definição

Seja C uma curva suave, orientada, com ponto inicial A e ponto terminal B. Seja $f(x, y, z)$ um campo escalar definido em cada ponto de C. Dividimos a curva C em n pequenos arcos pelos pontos

$$A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots, P_n = B.$$

Denotamos por Δs_i o comprimento do arco $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$. Em cada arco $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$, escolhemos um ponto Q_i (ver Figura 5.1).

Calculamos o valor de f no ponto Q_i, multiplicamos este valor por Δs_i e formamos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta s_i.$$

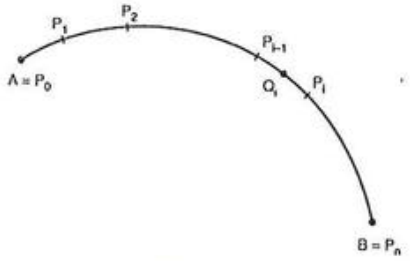


Figura 5.1

A integral de linha de f ao longo de C, de A até B, que denotamos $\int_C f(x, y, z)\, ds$, é definida por

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta s_i, \qquad (1)$$

quando o limite à direita existe.

A curva C é também chamada CAMINHO DE INTEGRAÇÃO.

Se a curva C é suave por partes, a integral de linha sobre C é definida como a soma das integrais sobre cada parte suave de C.

A $\int_C f(x, y, z)\, ds$ também é denominada integral do campo escalar f com respeito ao comprimento de arco de C.

5.1.2 Cálculo da Integral de Linha

Para calcular a integral de linha, necessitamos da equação que representa a curva C.

1º CASO. Representamos C por $\vec{h}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$, $s \in [a, b]$, onde s é o parâmetro comprimento de arco de C.

Neste caso, a divisão da curva C pelos pontos $P_0, P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots, P_n$ origina uma participação no intervalo $[a, b]$, dada pelos pontos

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{i-1} < s_i < \ldots < s_n = b$$

(ver Figura 5.2).

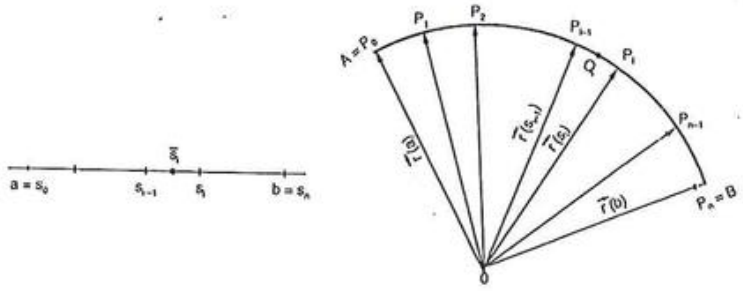


Figura 5.2

O ponto Q_i em (1), tem coordenadas $(x(\bar{s}_i),\ y(\bar{s}_i),\ z(\bar{s}_i))$, onde $\bar{s}_i$ é algum ponto do intervalo $[s_{i-1}, s_i]$. A soma que aparece em (1) pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(\bar{s}_i),\ y(\bar{s}_i),\ z(\bar{s}_i))\, \Delta s_i.$$

Esta soma é uma soma de Riemann da função $f(x(s), y(s), z(s))$. Assim, o limite em (1) é a integral definida desta função. Temos, então

$$\boxed{\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(s),\ y(s),\ z(s))\, ds} \qquad (2)$$

Exemplos. (i) Calcular $\int_C (x + 2y)\, ds$, onde C é a semicircunferência dada na Figura 5.3.

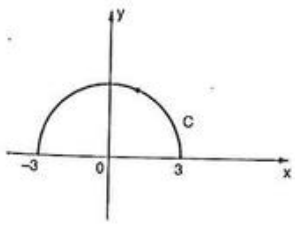


Figura 5.3

Solução. Conforme vimos em 2.10.6 (i), a curva dada pode ser representada por

$$\vec{h}(s) = 3\cos\frac{s}{3}\,\vec{i} + 3\,\text{sen}\,\frac{s}{3}\,\vec{j}, \qquad 0 \le s \le 3\pi.$$

Portanto,

$$\int_C (x + 2y)\, ds = \int_0^{3\pi} \left(3\cos\frac{s}{3} + 6\,\text{sen}\,\frac{s}{3}\right) ds$$

$$= \left(9\,\text{sen}\,\frac{s}{3} - 18\cos\frac{s}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi}$$

$$= 36.$$

(ii) Calcular $\int_C (x^2 + y^2 - z)\, ds$, onde C é a hélice circular dada por

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \text{sen}\,t\,\vec{j} + t\vec{k},$$

do ponto $P(1, 0, 0)$ até $Q(1, 0, 2\pi)$.

Solução. A função comprimento de arco de $\vec{r}(t)$ é dada por

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}\,'(t^*)|\, dt^*$$

$$= \int_0^t \sqrt{2}\, dt^*$$

$$= \sqrt{2}\, t.$$

Encontrando t como função de s, obtemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Logo, C pode ser reparametrizada por

$$\vec{h}(s) = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \text{sen}\,\frac{s}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\,\vec{k}.$$

O ponto $P(1, 0, 0)$ corresponde a $s = 0$ e $Q(1, 0, 2\pi)$ corresponde a $s = 2\sqrt{2}\pi$. Portanto,

$$\int_C (x^2 + y^2 - z)\, ds = \int_0^{2\sqrt{2}\pi} \left(\cos^2\frac{s}{\sqrt{2}} + \text{sen}^2\,\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) ds$$

$$= \left(s - \frac{s^2}{2\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}\pi}$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\,(1 - \pi).$$

2º CASO. Representamos C por

$\vec{r}(t) = \vec{x}(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, $t \in [t_0, t_1]$, onde t é um parâmetro qualquer.

Para calcular a integral de linha neste caso, fazemos uma mudança de variáveis em (2). Temos,

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s))\, ds$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \frac{ds}{dt}\, dt.$$

Como $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}\,'(t)|$, temos

$$\boxed{\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt.} \qquad (3)$$

Exemplos. (i) Podemos resolver o exemplo (ii) do 1º caso, desta seção, usando a fórmula (3). Temos,

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \text{sen}\,t\,\vec{j} + t\vec{k};$$

$$\vec{r}\,'(t) = -\text{sen}\,t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k};$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{2}.$$

Ao ponto $P(1, 0, 0)$ corresponde $t = 0$ e ao ponto $Q(1, 0, 2\pi)$ corresponde $t = 2\pi$. Logo,

$$\int_C (x^2 + y^2 - z)\, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \text{sen}^2 t - t)\,.\,\sqrt{2}\, dt$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\,(1 - \pi).$$

(ii) Calcular $\int_C xy\, ds$, onde C é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $y + z = 8$.

Solução. A Figura 5.4 mostra um esboço da curva C. Para parametrizá-la, observamos que x e y devem satisfazer a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 4$, que é a projeção de C sobre o plano xy. Fazemos então,

$$x = 2\cos t;\ y = 2\operatorname{sen} t;\ t \in [0,\ 2\pi].$$

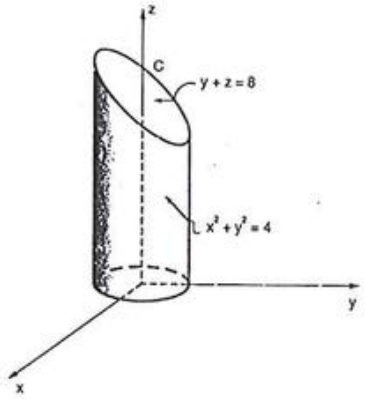


Figura 5.4

Substituindo o valor de y na equação $y + z = 8$, obtemos

$$z = 8 - 2\operatorname{sen} t.$$

Portanto,

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j} + (8 - 2\operatorname{sen} t)\vec{k},\ t \in [0,\ 2\pi].$$

Usando (3), temos

$$\int_C xy\,ds = \int_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 2\operatorname{sen} t \cdot 2\sqrt{1 + \cos^2 t}\ dt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t)^{1/2} \cdot 2\cos t \operatorname{sen} t\ dt$$

$$= -4 \cdot \frac{2}{3}(1 + \cos^2 t)^{3/2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0.$$

(iii) Calcular $\int_C (x + y)\,ds$, onde C é a intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

Conforme Exemplo 2.4.14 (iii), uma equação vetorial de C é dada por

$$\vec{r}(t) = (1 - \cos t)\,\vec{i} + (1 + \cos t)\,\vec{j} + \sqrt{2}\operatorname{sen} t\,\vec{k};\ t \in [0,\ 2\pi].$$

Logo,

$$\int_C (x + y)\,ds = \int_0^{2\pi} [(1 - \cos t) + (1 + \cos t)]\sqrt{2}\ dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} dt$$

$$= 4\sqrt{2}\pi.$$

5.1.3 Propriedades

As propriedades das integrais de linha são análogas às propriedades das integrais definidas.

Nas propriedades que seguem estamos supondo que C é uma curva suave ou suave por partes e que $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ são funções contínuas em cada ponto de C.

Temos,

a) $\int_C kf(x,\ y,\ z)\,ds = k\int_C f(x,\ y,\ z)\,ds,$

onde k é uma constante.

b) $\int_C [f(x,\ y,\ z) + g(x,\ y,\ z)]\,ds = \int_C f(x,\ y,\ z)\,ds + \int_C g(x,\ y,\ z)\,ds.$

c) Se C é uma curva com ponto inicial A e ponto terminal B, P um ponto de C entre A e B; C_1 a parte de C de A até P e C_2 a parte de C de P até B (ver Figura 5.5), então,

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_{C_1} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_2} f(x, y, z)\, ds.$$

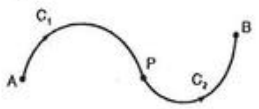


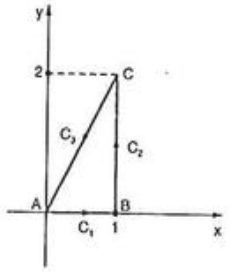
Figura 5.5

d) $\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_{-C} f(x, y, z)\, ds$, onde $-C$ representa a curva C orientada no sentido oposto.

5.1.4 Exemplos

(i) Calcular $\int_C 3xy\, ds$, sendo C o triângulo de vértices $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ e $C(1, 2)$, no sentido anti-horário.

Solução. Para calcular a integral, devemos dividir a curva C em três partes suaves, conforme Figura 5.6.



A(0,0)
B(1,0)
C(1,2)

Figura 5.6

Uma parametrização de C_1 é $\vec{r}(t) = t\,\vec{i}$, $t \in [0, 1]$.

Portanto,

$$\int_{C_1} 3xy\, ds = \int_0^1 3t.0.1\, dt = 0.$$

C_2 pode ser parametrizada por $\vec{r}(t) = \vec{i} + t\vec{j}$, $t \in [0, 2]$.

Assim,

$$\int_{C_2} 3xy\, ds = \int_0^2 3.1.\, t.1\, dt = 3 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 6.$$

O caminho C_3 pode ser representado por

$$\vec{r}(t) = (1 - t)\vec{i} + (2 - 2t)\vec{j},\ t \in [0, 1].$$

Portanto,

$$\int_{C_3} 3xy\, ds = \int_0^1 3(1 - t)\,(2 - 2t) \cdot \sqrt{5}\, dt$$

$$= 3\sqrt{5} \int_0^1 (2 - 4t + 2t^2)\, dt$$

$$= 2\sqrt{5}.$$

Logo,

$$\int_C 3xy\, ds = \int_{C_1} 3xy\, ds + \int_{C_2} 3xy\, ds + \int_{C_3} 3xy\, ds$$

$$= 0 + 6 + 2\sqrt{5}$$

$$= 6 + 2\sqrt{5}.$$

(ii) Calcular $\int_C (|x| + |y|)\, ds$ e $\int_{-C} (|x| + |y|)\, ds$, onde C é o segmento de reta $\overline{AB}$, com $A(-2, 0)$ e $B(2, 2)$.

Uma equação vetorial de C é dada por

$$\vec{r}(t) = (-2 + 4t)\,\vec{i} + 2t\,\vec{j},\ t \in [0, 1].$$

Portanto,

$$\int_C (|x| + |y|)\, ds = \int_0^1 (|-2 + 4t| + |2t|)\, 2\sqrt{5}\, dt$$

$$= 2\sqrt{5}\left[\int_0^{1/2} (2 - 4t + 2t)\, dt + \int_{1/2}^1 (-2 + 4t + 2t)\, dt\right]$$

$$= 2\sqrt{5}\left[\left(2t - t^2\right)\Big|_0^{1/2} + \left(-2t + 3t^2\right)\Big|_{1/2}^1\right]$$

$$= 4\sqrt{5}.$$

Conforme vimos em 2.7.1, a curva $-C$ é dada por

$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(a + b - t),\ t \in [a,\ b].$$

Como $\vec{r}(t) = (-2 + 4t)\,\vec{i} + 2t\,\vec{j},\ t \in [0,\ 1]$, temos

$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(1 - t)$$

$$= (2 - 4t)\,\vec{i} + (2 - 2t)\,\vec{j},\ t \in [0,\ 1].$$

Portanto,

$$\int_{-C} (|x| + |y|)\, ds = \int_0^1 (|2 - 4t| + |2 - 2t|)\, 2\sqrt{5}\, dt$$

$$= 4\sqrt{5}.$$

Aplicações

A seguir, desenvolveremos algumas aplicações das integrais curvilíneas de função escalar.

5.1.5 Massa e Centro de Massa de um Fio Delgado

Consideremos um fio delgado de densidade variável, com a forma de uma curva C, como na Figura 5.7.

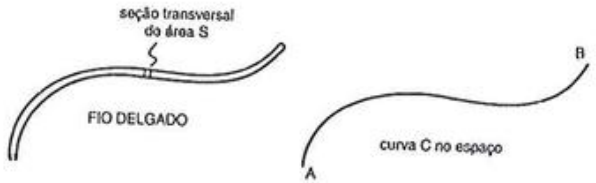


Figura 5.7

Vamos supor que sua densidade de massa $\rho(x, y, z)$ seja constante sobre qualquer seção transversal de área S. Então o fio pode ser identificado com a curva C.

A função $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, S$ é chamada densidade linear de massa ou massa por unidade de comprimento.

Se o fio é representado pela curva C da Figura 5.8 e se a densidade no ponto (x, y, z) é dada por $f(x, y, z)$, então uma aproximação da massa da parte do fio entre P_{i-1} e P_i é dada por

$$f(Q_i)\ \Delta s_i.$$

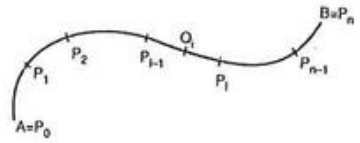


Figura 5.8

A massa total M do fio é aproximadamente igual à soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\ \Delta s_i.$$

Portanto, pela Definição 5.1.1, obtém-se

$$M = \int_C f(x, y, z)\, ds.$$

O centro de massa $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x f(x, y, z)\, ds$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y f(x, y, z)\, ds$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_C z f(x, y, z)\, ds.$$

O ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é também chamado centro de gravidade. A coincidência do centro de gravidade com o centro de massa vem da hipótese de que o campo gravitacional da Terra é uniforme. Algumas experiências nos mostram que esta hipótese não é inteiramente correta. No entanto, para quase todos os problemas de Mecânica ela é usada.

5.1.6 Exemplos

(i) Calcular a massa de um fio delgado com a forma de um semicírculo de raio a, considerando que a densidade em um ponto P é diretamente proporcional a sua distância à reta que passa pelos pontos extremos.

Solução. O fio tem a forma da curva C representada na Figura 5.9.

Uma parametrização de C é dada por

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\,\text{sen}\,t\,\vec{j},\ t \in [0, \pi].$$

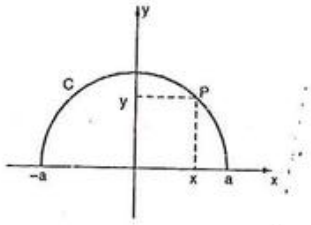


Figura 5.9

Como a densidade $f(x, y)$ no ponto (x, y) é diretamente proporcional a sua distância à reta que passa pelos pontos extremos do fio, analisando a Figura 5.9, concluímos que

$$f(x, y) = ky,\ k \text{ constante.}$$

Então,

$$M = \int_C f(x, y)\, ds$$

$$= \int_C ky\, ds$$

$$= \int_0^{\pi} k \cdot a\,\text{sen}\,t \cdot \sqrt{(-a\,\text{sen}\,t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt.$$

$$= 2k a^2 \text{ unidades de massa.}$$

(ii) Calcular as coordenadas do centro de massa de um fio delgado que tem a forma da hélice

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\vec{j} + 5t\,\vec{k},\ t \in [0, 2\pi],$$

se a densidade no ponto (x, y, z) é $x^2 + y^2 + z^2$.

Solução. Inicialmente vamos calcular a massa M do fio. Temos,

$$M = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t + 25t^2)\sqrt{(-2\,\text{sen}\,t)^2 + (2\cos t)^2 + 25}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4 + 25t^2)\sqrt{29}\, dt$$

$$= \sqrt{29}\left(8\pi + \frac{200}{3}\pi^3\right) \text{ unidades de massa.}$$

A coordenada $\bar{x}$ é dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x(x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} 2\cos t\,(4 + 25t^2)\sqrt{29}\, dt$$

$$= \frac{8\sqrt{29}}{M}\int_0^{2\pi} \cos t\, dt + \frac{50\sqrt{29}}{M}\int_0^{2\pi} t^2 \cos t\, dt$$

$$= \frac{8\sqrt{29}}{M}\,\operatorname{sen} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{50\sqrt{29}}{M}\left(t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{200\sqrt{29}\pi}{M}.$$

Portanto, $\bar{x} = \dfrac{200\sqrt{29}\,\pi}{\sqrt{29}\left(8\pi + \dfrac{200}{3}\,\pi^3\right)}$

$$= \frac{75}{3 + 25\pi^2}.$$

Analogamente calcula-se $\bar{y}$. Temos,

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y(x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen} t\,(4 + 25t^2)\sqrt{29}\, dt$$

$$= \frac{-200\sqrt{29}\pi^2}{M}.$$

Substituindo o valor de M, já encontrado, vem

$$\bar{y} = \frac{-75\pi}{3 + 25\pi^2}.$$

Finalmente calculamos $\bar{z}$, que é dado por

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_C z(x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} 5t(4 + 25t^2)\sqrt{29}\, dt$$

$$= \frac{5\sqrt{29}}{M}\left(8\pi^2 + 100\pi^4\right)$$

Portanto, $\bar{z} = \dfrac{15(2\pi + 25\pi^3)}{6 + 50\pi^2}$.

5.1.7 Momento de Inércia

Cada ponto material em um corpo em rotação tem uma certa quantidade de energia cinética. Um ponto material P, de massa m, a uma distância r do eixo de rotação, tem uma velocidade $v = \omega r$, sendo ω a velocidade angular do ponto P (ver Figura 5.10). A energia cinética de P é dada por

$$\frac{1}{2}\, m\, r^2\omega^2.$$

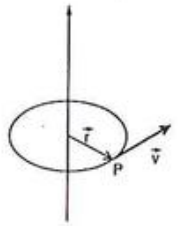


Figura 5.10

Para um corpo composto de massas puntiformes discretas, a energia cinética total é dada por

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\right)\omega^2. \tag{4}$$

O somatório que aparece em (4) define o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação considerado.

Se um fio delgado tem densidade variável $f(x, y, z)$, fazendo considerações análogas às que foram feitas em 5.1.5, concluímos que o momento de inércia do fio em relação a um eixo L é dado por

$$I_L = \int_C \delta^2(x, y, z)\, f(x, y, z)\, ds, \tag{5}$$

onde $\delta(x, y, z)$ é a distância do ponto (x, y, z) de C ao eixo L.

5.1.8 Exemplo

Um arame tem a forma de um semicírculo de raio 4, conforme Figura 5.11. Determinar seu momento de inércia em relação ao diâmetro que passa pelos extremos do arame, se a densidade no ponto (x, y) é $x + y$.

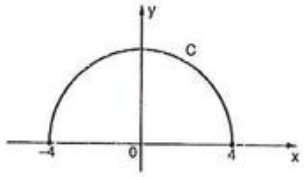


Figura 5.11

Solução. Uma equação vetorial de C é dada por

$$\vec{r}(t) = 4\cos t\, \vec{i} + 4\operatorname{sen} t\, \vec{j}, \quad t \in [0, \pi].$$

Para usarmos (5) necessitamos encontrar $\delta(x, y, z)$. Como o eixo L coincide com o eixo dos x, temos que $\delta(x, y, z) = y$. Então,

$$I_L = \int_C y^2(x + y)\, ds$$

$$= \int_0^{\pi} 16\operatorname{sen}^2 t\, (4\cos t + 4\operatorname{sen} t)\, 4\, dt$$

$$= 256 \int_0^{\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t \cos t + \operatorname{sen}^3 t\right) dt$$

$$= 256\left(\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} - \cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1024}{3} \text{ unidades de momento de inércia.}$$

5.1.9 Lei de Biot-Savart

A Figura 5.12 mostra uma carga puntiforme positiva q, movendo-se com uma velocidade $\vec{v}$. Esta carga em movimento origina um campo magnético, cuja intensidade, em um ponto qualquer P, é dada por

$$B_q = \frac{k\, q\, v \operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

onde k é uma constante, r é a distância de P a q e θ é o ângulo formado por $\vec{v}$ e $\vec{r}$.

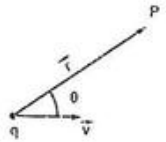


Figura 5.12

Veremos, agora, como determinar a intensidade, em um ponto qualquer P, do campo magnético $\vec{B}$, produzido por todas as cargas em movimento em um circuito.

Suponhamos que uma corrente elétrica de intensidade i circula um condutor com a forma de uma curva C, conforme Figura 5.13. Dividimos o condutor em pequenos elementos de comprimento ds. O volume de cada elemento é dado por $A\, ds$, onde A é a área de sua seção reta. Se existirem n portadores de carga por unidade de volume, cada um de carga q, a carga total dQ, em movimento no elemento, é

$$dQ = n\, q\, A\, ds. \tag{6}$$

O conjunto de cargas em movimento, no elemento, é equivalente a uma única carga dQ, movendo-se com velocidade $\vec{v}$. Portanto, em um ponto qualquer P, o campo magnético $d\vec{B}$ produzido por estas cargas tem intensidade dB dada por

$$dB = \frac{k\,dQ\,v\,\text{sen}\theta}{r^2}. \tag{7}$$

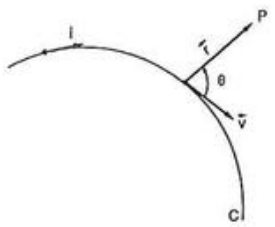


Figura 5.13

Substituindo (6) em (7), obtemos

$dB = \dfrac{k\,n\,q\,A\,ds\,v\,\text{sen}\theta}{r^2}$. Mas $n\,q\,v\,A$ é a intensidade i da corrente no elemento, de modo que

$$dB = k\,\frac{i\,ds\,\text{sen}\theta}{r^2}. \tag{8}$$

A expressão (8) é chamada Lei de Biot-Savart. Ela nos dá a intensidade, em um ponto qualquer P, do campo magnético $d\vec{B}$, produzido pelo conjunto de cargas em movimento no elemento ds.

A intensidade em um ponto qualquer P do campo magnético resultante $\vec{B}$, devido ao circuito completo, é dada pela integral

$$B = k\int_C \frac{i\,\text{sen}\theta}{r^2}\,ds.$$

5.1.10 Exemplos

(i) Seja um condutor da forma de uma espira circular de raio 2, percorrido por uma corrente de intensidade i, como mostra a Figura 5.14. Achar a intensidade do campo magnético $\vec{B}$, no centro da espira.

Neste caso r e θ são constantes: $r = 2$ e $\theta = 90°$. Então, $B = k\int_C \frac{i}{4}\,ds$.

BIBLIOTECA
UNED-PONTA GROSSA
CEFET-PR

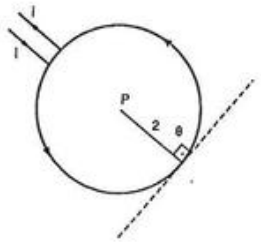


Figura 5.14

Resolvendo a integral, temos

$$B = k\int_0^{2\pi} \frac{i}{4}\sqrt{(-2\text{sen}t)^2 + (2\cos t)^2}\,dt$$

$$= k\int_0^{2\pi} \frac{i}{4}\,2\,dt$$

$$= k\,\pi\,i.$$

(ii) Um condutor tem a forma de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Uma corrente de intensidade i circula o condutor. Determinar a intensidade do campo magnético resultante $\vec{B}$ no vértice de menor ângulo.

A Figura 5.15 mostra o condutor que é formado por 3 segmentos retilíneos C_1, C_2 e C_3.

A intensidade do campo magnético $\vec{B}$ no ponto P é dada por

$$B = k\int_{C_1} \frac{i\,\text{sen}\theta}{r^2}\,ds + k\int_{C_2} \frac{i\,\text{sen}\theta}{r^2}\,ds + k\int_{C_3} \frac{i\,\text{sen}\theta}{r^2}\,ds.$$

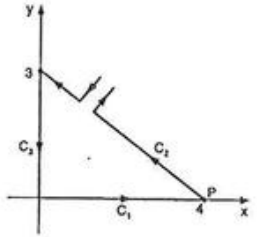


Figura 5.15

Devemos calcular as integrais ao longo de C_1, C_2 e C_3.

Temos:

a) Ao longo de C_1. Neste caso, $r = 4 - x$ e $\text{sen}\theta = 0$. Portanto,

$$\int_{C_1} \frac{i\,\text{sen}\theta}{r^2}\,ds = \int_{C_1} 0\,ds = 0.$$

b) Ao longo de C_2. Também neste caso $\text{sen}\theta = 0$ e dessa forma

$$\int_{C_2} \frac{i\,\text{sen}\theta}{r^2}\,ds = 0.$$

c) Ao longo de C_3. Conforme Figura 5.16, temos $r = \sqrt{4^2 + y^2}$ e $\text{sen}\theta = \dfrac{4}{\sqrt{4^2 + y^2}}$.

O segmento C_3 pode ser parametrizado por

$$\vec{r}(t) = (3 - 3t)\vec{j}, \quad t \in [0, 1].$$

Portanto,

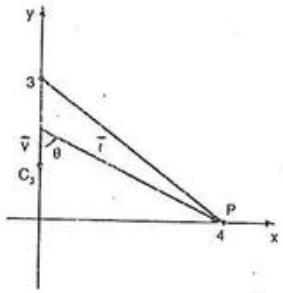


Figura 5.16

$$\int_{C_3} \frac{i\,\text{sen}\theta}{r^2}\,ds = i\int \frac{\dfrac{4}{\sqrt{16 + y^2}}\,i}{16 + y^2}\,ds$$

$$= i\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{16 + (3 - 3t)^2}\,[16 + (3 - 3t)^2]}\,3dt$$

$$= 12i\int_0^1 [16 + (3 - 3t)^2]^{-3/2}\,dt.$$

A integral $\int [16 + (3 - 3t)^2]^{-3/2}\,dt$ é resolvida pela substituição trigonométrica $3 - 3t = 4tg\theta$. Temos,

$$\int_{C_1} \frac{i\text{sen}\theta}{r^2}\,d\theta = 12i\left(\frac{-1}{48}\,\frac{(3 - 3t)}{\sqrt{16 + (3 - 3t)^2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{-12i}{48}\left(\frac{(3 - 3)}{\sqrt{16 + (3 - 3)^2}} - \frac{3}{\sqrt{16 + 9}}\right).$$

$$= \frac{3i}{20}.$$

Portanto, $B = \dfrac{3\,k\,i}{20}$.

5.2 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 19, calcular as integrais curvilíneas.

1. $\int_C (2x - y + z)\,ds$, onde C é o segmento de reta que liga $A(1, 2, 3)$ a $B(2, 0, 1)$.

2. $\int_C (3y - \sqrt{z})\,ds$, onde C é o arco de parábola $z = y^2$, $x = 1$ de $A(1, 0, 0)$ a $B(1, 2, 4)$.

3. $\int_C xz\,ds$, onde C é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x = y$.

4. $\int_C |y|\,ds$, onde C é a curva dada por $y = x^3$ de $(-1, -1)$ a $(1, 1)$.

5. $\int_C y(x - z)\,ds$, onde C é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x + z = 3$.

6. $\int_C (x + y)\,ds$, onde C é a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$.

7. $\int_C 2xy\,ds$, onde C é o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $(1, \sqrt{3})$.

8. $\int_C x^2\,ds$, onde C é o arco da hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, 1º quadrante.

9. $\int_C y^2\,ds$, onde C é o 1º arco da ciclóide $\vec{r}(t) = 2(t - \text{sen}t)\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j}$.

10. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\,ds$, onde C é a intersecção das superfícies $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ e $y = 2$.

11. $\int_C (x + y + z)\,ds$, onde C é o quadrado de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$.

12. $\int_C xy\,ds$, onde C é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

13. $\int_C xy^2(1 - 2x^2)\,ds$, onde C é a parte da curva de Gauss, $y = e^{-x^2}$, de $A(0, 1)$ até $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

14. $\int_C \frac{xy^2}{\sqrt{1 + 4x^2y^4}}\,ds$, onde C é a curva dada por $y = \frac{1}{1 + x^2}$, de $(0, 1)$ a $(1, 1/2)$.

15. $\int_C (|x| + |y|)\,ds$, onde C é o retângulo formado pelas retas $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$ e $y = 1$.

16. $\int_C (x + y - 1)\,ds$, onde C é a parte da intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $y = 1$ que está abaixo do plano $z = 5$.

17. $\int_C (x^2 + y^2 - z)\,ds$, onde C é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$ e $z = 4$.

18. $\int_C (x - y)\,ds$, onde C é o triângulo da Figura 5.17.

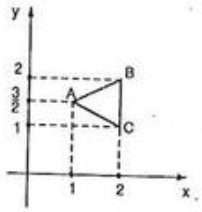


Figura 5.17

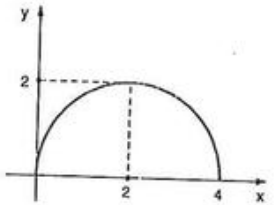


Figura 5.18

19. $\int_C y^2\,ds$, onde C é a semicircunferência da Figura 5.18.

20. Um fio delgado é preso em dois suportes fixos de mesma altura, tomando a forma da catenária $y = \cosh x$, $-2 \le x \le 2$. Supondo que a densidade do fio é a mesma em todos os pontos, calcular a massa do fio.

21. Dado um arame semicircular uniforme de raio 4 cm:

a) Mostrar que o centro de massa está situado no eixo de simetria a uma distância de $\frac{8}{\pi}$ cm do centro.

b) Mostrar que o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa pelos extremos do arame é $8M$ sendo M a massa do arame.

22. Calcular a massa de um arame cujo formato é definido pela intersecção do plano $2x + y + z = 4$ com os planos coordenados, se a densidade do arame em um ponto (x, y, z) é $2x + 1$.

23. Determinar a massa de um fino anel circular de raio 2 cm, sabendo que sua densidade é constante.

24. Calcular o momento de inércia em relação ao eixo dos z de uma espira da hélice circular uniforme

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j} + t\vec{k}.$$

25. Um fio delgado tem a forma do segmento de reta que une os pontos (1, 1) e (2, 4). Determinar o momento de inércia do fio em relação ao eixo $y = -1$, supondo que a densidade no ponto (x, y) é proporcional à distância deste ponto até o eixo dos y.

26. Calcular o centro de massa de um arame com a forma de um quadrado de vértices $(0, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$ e $(0, 1)$ sabendo que a densidade no ponto (x, y) é proporcional ao quadrado da distância deste ponto até a origem.

27. Dá-se a um arame a forma de um arco de parábola conforme Figura 5.19. Se a densidade no ponto (x, y) é proporcional a sua distância ao eixo de simetria, calcular a massa e o centro de massa do arame.

28. Calcular a massa de um fio delgado reto de 2 m de comprimento se a densidade em cada ponto é proporcional a distância deste ponto à extremidade mais próxima.

29. A Figura 5.20, mostra um fio delgado C e um eixo L. Calcular o momento de inércia do fio em relação ao eixo L, supondo a densidade constante.

30. Um segmento retilíneo de fio, de comprimento ℓ, conduz uma corrente i. Mostrar que a intensidade do campo magnético $\vec{B}$, associado a este segmento, a uma distância R, tomada sobre a sua mediatriz (ver Figura 5.21) é dada por

$$B = \frac{2ki\ell}{R(\ell^2 + 4R^2)^{1/2}}.$$

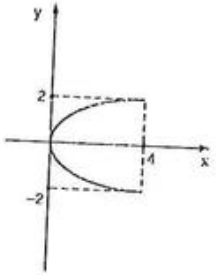


Figura 5.19

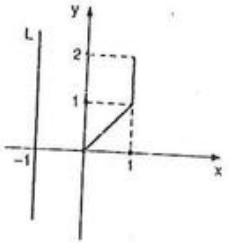


Figura 5.20

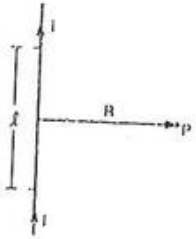


Figura 5.21

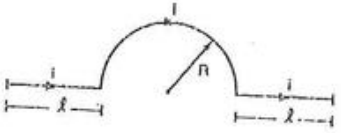


Figura 5.22

31. O fio mostrado na Figura 5.22 conduz uma corrente i. Determinar a intensidade do campo magnético $\vec{B}$ no centro C do semicírculo, produzido:

a) por um dos segmentos de reta de comprimento ℓ;

b) pelo segmento semicircular de raio R;

c) pelo fio todo.

32. Uma espira quadrada de lado a conduz uma corrente i. Mostrar que a intensidade do campo magnético $\vec{B}$, no seu centro, é dada por

$$B = \frac{8\sqrt{2}\,ki}{a}.$$

5.3 INTEGRAIS DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS

A integral de linha ou curvilínea de um campo vetorial, também pode ser considerada como uma generalização natural do conceito de integral definida. Para compreender sua origem e utilidade, iniciamos explorando intuitivamente o conceito físico de trabalho.

Trabalho realizado por uma força

Na Física, o trabalho realizado por uma força constante $\vec{f}$, para deslocar uma partícula em linha reta, é definido como o produto da componente da força na direção do deslocamento, pelo deslocamento.

Então, conforme Figura 5.23, se denotamos por w o trabalho realizado por $\vec{f}$ para mover uma partícula de A até B, temos

$$w = \left(|\vec{f}| \cos \alpha\right) \left|\vec{AB}\right|$$

$$= |\vec{f}| \left|\vec{AB}\right| \cos \alpha$$

$$= \vec{f} \cdot \vec{AB}.$$

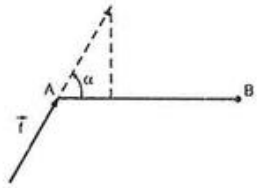
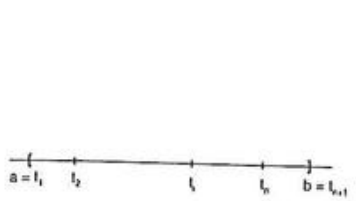


Figura 5.23

Vamos analisar agora, a noção mais geral de trabalho, supondo que uma partícula se move ao longo de uma curva C, sujeita à ação de um campo de forças variável $\vec{f}$.

Suponhamos que a curva C: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, seja suave e que $\vec{f} = \vec{f}(x, y z)$ seja contínua nos pontos de C. Dividimos C em pequenos arcos e aproximamos cada arco por um segmento retilíneo tangente à curva, como mostra a Figura 5.24.

Além disso, aproximamos a força variável $\vec{f}$ que atua em um arco genérico $\widehat{P_iP_{i+1}}$ pela força constante $\vec{f}(P_i)$.



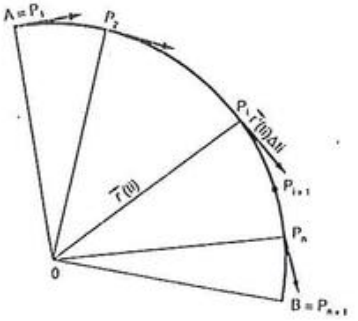


Figura 5.24

O trabalho realizado pela força constante $\vec{f}(P_i)$, ao longo do segmento retilíneo tangente à curva no ponto P_i, é dado por

$$\vec{f}(P_i) \cdot \vec{r}'(t_i)\Delta t_i$$

e constitui uma aproximação do trabalho realizado por $\vec{f}$ ao longo de $\widehat{P_iP_{i+1}}$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}(P_i) \cdot \vec{r}'(t_i)\,\Delta t_i$$

nos dá uma aproximação do trabalho total w, realizado por $\vec{f}$ ao longo de C.

5.3.1 Definição

Sejam C: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, uma curva suave e $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ um campo de forças contínuo sobre C. O trabalho realizado por $\vec{f}$ para deslocar uma partícula ao longo de C, de A até B, é definido como

$$w = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i)\,\Delta t_i \qquad (1)$$

Podemos observar que a somatória da expressão (1) é uma soma de Riemann da função de uma variável $\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$, sobre $[a, b]$. Portanto,

$$\boxed{w = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt.} \qquad (2)$$

5.3.2 Exemplos

(i) Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{f} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, para deslocar uma partícula, em linha reta, do ponto $P(1, 2)$ até $Q(3, 4)$.

Solução. Para calcular o trabalho, necessitamos de uma parametrização da trajetória C da partícula, que neste exemplo, é o segmento de reta que une $P(1, 2)$ a $Q(3, 4)$, conforme Figura 5.25.

Uma parametrização de C é dada por

$$\vec{r}(t) = (1, 2) + (3 - 1, 4 - 2)t$$

$$= (1 + 2t, 2 + 2t),\ t \in [0, 1].$$

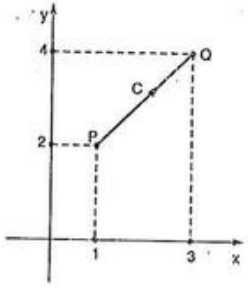


Figura 5.25

Portanto,

$$w = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + 2t}, \frac{1}{2 + 2t}\right) \cdot (2, 2)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{1 + 2t} + \frac{2}{2 + 2t}\right) dt$$

$$= (\ln(1 + 2t) + \ln(2 + 2t))\Big|_0^1$$

$$= \ln 3 + \ln 4 - \ln 2$$

$$= \ln 6 \text{ unidades de trabalho.}$$

(ii) Uma partícula move-se ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ sob a ação do campo de forças

$$\vec{f}(x, y, z) = \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \text{ onde } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Determinar o trabalho realizado por $\vec{f}$, se a posição inicial da partícula é $P(2, 0, 2)$ e ela se move no sentido anti-horário, completando uma volta.

Solução. A Figura 5.26 mostra a trajetória C da partícula. De acordo com 2.4.3, C pode ser representada pela equação vetorial

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

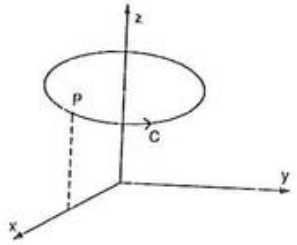


Figura 5.26

A função $\vec{f}$ que define o campo de forças é

$$\vec{f}(x, y, z) = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$= \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\ (x, y, z).$$

Portanto,

$$w = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{(4\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t + 4)^{3/2}} (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2) \cdot (-2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t,\ 0)\, dt$$

$$= \frac{-1}{16\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (-4\cos t \operatorname{sen} t + 4\cos t \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 0 \text{ unidades de trabalho.}$$

A integral sobre uma curva C, como surgiu na definição de trabalho, pode ocorrer em outras situações e é denominada integral curvilínea do campo vetorial $\vec{f}$ ao longo de C.

5.3.3 Definição

Seja C uma curva suave dada por $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Seja $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ um campo vetorial definido e limitado sobre C. A integral curvilínea de $\vec{f}$, ao longo de C, que denotamos $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, é definida por

$$\boxed{\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt} \quad , \tag{3}$$

sempre que a integral à direita existe.

Quando a curva C é suave por partes, definimos $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ como a soma das integrais sobre cada parte suave de C.

Se o campo $\vec{f}$ tem componentes f_1, f_2 e f_3 e $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, a integral curvilínea de $\vec{f}$ ao longo de C, pode ser reescrita como

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b [f_1(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + f_2(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + f_3(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)]\, dt. \tag{4}$$

A equação (4) nos sugere a notação

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_C (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz),$$

tradicionalmente usada para representar a integral curvilínea de um campo vetorial.

5.3.4 Propriedades

Em 5.1.3 vimos as propriedades da integral de linha de um campo escalar f. As propriedades (a), (b) e (c) permanecem válidas para a integral de linha de um campo vetorial $\vec{f}$. A propriedade (d) é substituída por:

$$\int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Além dessas propriedades, convém destacar a relação existente entre a integral de um campo vetorial e a integral de um campo escalar. Temos a seguinte proposição.

5.3.5 Proposição

Seja $\vec{f}$ um campo vetorial contínuo, definido sobre uma curva suave C: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$. Se T é a componente tangencial de $\vec{f}$ sobre C, isto é, T é a componente de $\vec{f}$ na direção do vetor tangente unitário de C, temos,

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_C T\, ds.$$

Prova. Seja $\vec{u}(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ o vetor tangente unitário de C. A componente tangencial de $\vec{f}$, que pode ser visualizada na Figura 5.27, é dada por

$$T = \vec{f} \cdot \cos\theta.$$

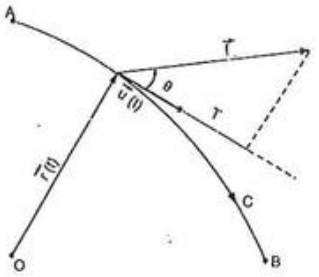


Figura 5.27

Como o vetor $\vec{u}$ é unitário, podemos escrever

$$T = |\vec{f}|\ |\vec{u}| \cos\theta$$

$$= \vec{f}\ .\ \vec{u}.$$

Portanto, usando 5.1 (3), temos,

$$\int_C T\,ds = \int_a^b T(x(t),\ y(t),\ z(t))\ \ \vec{r}\,'(t)\ dt$$

$$= \int_a^b \left[\vec{f}(x(t),\ y(t),\ z(t))\ .\ \vec{u}(t)\right] |\vec{r}\,'(t)|\ dt$$

$$= \int_a^b \left[\vec{f}(x(t),\ y(t),\ z(t))\ .\ \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right] |\vec{r}\,'(t)|\ dt$$

$$= \int_a^b \vec{f}(x(t),\ y(t),\ z(t))\ .\ \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_C \vec{f}\ .\ d\vec{r}.$$

Esta proposição nos permite fazer uma análise da integral de linha de um campo vetorial em diversas situações práticas, como segue:

(i) Se em cada ponto P da curva C, o campo $\vec{f}$ é perpendicular à reta tangente a C em P, a integral de $\vec{f}$ ao longo de C será nula. Em particular, se $\vec{f}$ é um campo de forças, será nulo o trabalho realizado por $\vec{f}$ ao longo de C.

(ii) Se o campo $\vec{f}$ é o campo de velocidades de um fluido em movimento, a componente tangencial de $\vec{f}$ determina um fluxo ao longo de C. Se a curva C é fechada, a integral de linha de $\vec{f}$ ao longo de C, que denotamos $\oint_C \vec{f}\ .\ d\vec{r}$, mede a tendência do fluido de circular em torno de C e é chamada circulação de $\vec{f}$ sobre C. Em particular, se C é uma curva plana e o campo de velocidades é perpendicular ao plano que contém C, a circulação será nula.

5.3.6 Exemplos

(i) Calcular $\int_C (2x\,dx + yz\,dy + 3z\,dz)$, ao longo da:

a) parábola $z = x^2$, $y = 2$ do ponto $A(0, 2, 0)$ ao ponto $B(2, 2, 4)$;

b) linha poligonal $A\ O\ B$ onde O é a origem.

Solução de (a). A Figura 5.28 mostra o caminho C de integração. Fazendo $x = t$, obtemos as equações paramétricas de C, dadas por

$$x = t$$

$$y = 2$$

$$z = t^2 \quad , \quad t \in [0,\ 2]$$

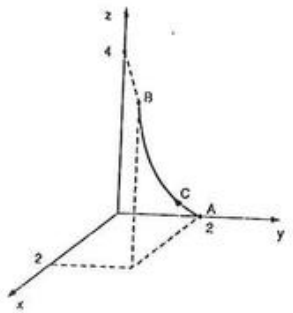


Figura 5.28

Utilizando a equação (4), vem

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (2t.1 + 2t^2.0 + 3t^2.2t)\, dt$$

$$= 28.$$

Observamos que, neste item, poderíamos ter usado como parâmetro a variável x, já que para parametrizar C fizemos $x = t$.

Solução de (b). A Figura 5.29 mostra o caminho C de integração. Como o caminho não é suave, vamos dividi-lo em dois pedaços suaves C_1 e C_2.

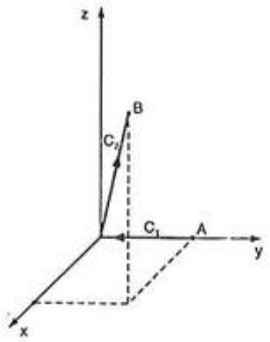


Figura 5.29

O caminho C_1 tem equação vetorial $\vec{r}(t) = (2 - 2t)\vec{j}$, $t \in [0, 1]$.

Portanto, utilizando a equação (4), temos

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [2.0.0 + (2 - 2t) \cdot 0.0 + 3.0.0]\, dt$$

$$= 0.$$

O caminho C_2 tem equação vetorial

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} + 4t\vec{k}, \quad t \in [0, 1].$$

Portanto, utilizando a equação (4), temos

$$\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [2.2t.2 + 2t.4t.2 + 3.4t.4]\, dt$$

$$= \frac{100}{3}.$$

Logo,

$$\int_C [2x\, dx + yz\, dy + 3z\, dz] = \int_{C_1} [2x\, dx + yz\, dy + 3z\, dz] + \int_{C_2} [2x\, dx + yz\, dy + 3z\, dz]$$

$$= \frac{100}{3}.$$

(ii) Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{f} = (xz, xy, yz)$ e C o caminho poligonal que une o ponto $A(1, 0, 0)$ ao ponto $B(0, 2, 2)$, passando por $D(1, 1, 0)$.

Solução. Para calcular a integral, dividimos C em 2 caminhos C_1 e C_2, conforme Figura 5.30.

O caminho C_1 tem equação vetorial

$$\vec{r}(t) = \vec{i} + t\vec{j}, \quad t \in [0, 1].$$

Portanto, utilizando a equação (3), temos

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (1.0, 1.t, t.0) \cdot (0, 1, 0)\, dt$$

$$= \int_0^1 t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}.$$

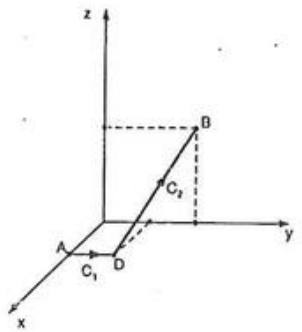


Figura 5.30

O caminho C_2 pode ser representado pela equação vetorial

$$\vec{r}(t) = (1 - t)\vec{i} + (1 + t)\vec{j} + 2t\vec{k}, \quad t \in [0, 1].$$

Portanto, utilizando a equação (3), vem

$$\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [(1 - t)2t, \ (1 - t)(1 + t), \ (1 + t)2t] \cdot (-1, \ 1, \ 2)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left[(2t - 2t^2)(-1) + (1 - t^2).1 + (2t + 2t^2).2\right] dt$$

$$= \frac{11}{3}.$$

Logo,

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{11}{3} = \frac{25}{6}.$$

(iii) Calcular o trabalho realizado pelo campo $\vec{f} = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \ \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ para deslocar uma partícula ao longo da semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, no sentido anti-horário.

Solução. Neste exemplo, podemos verificar que em cada ponto de C, o campo $\vec{f}$ é perpendicular ao vetor tangente unitário de C (ver Figura 5.31). Portanto, a componente tangencial de $\vec{f}$ sobre C é nula, e dessa forma, pela Proposição 5.3.5, concluímos que

$$W = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$= 0.$$

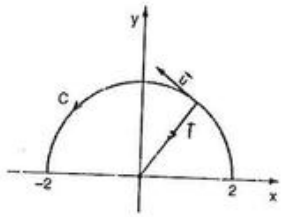


Figura 5.31

(iv) O campo de velocidades de um fluido em movimento é dado por

$$\vec{v} = (-y, \ x).$$

Calcular a circulação do fluido ao redor da curva fechada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, vista na Figura 5.32.

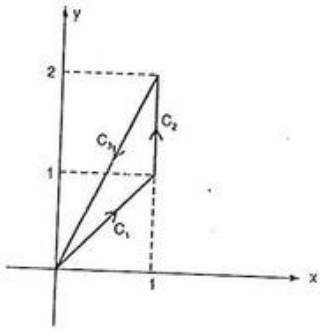


Figura 5.32

Solução. A circulação do fluido ao redor de C é dada por

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$

Antes de passarmos ao cálculo dessas integrais, é interessante analisar a representação geométrica do campo vetorial $\vec{v}$ (ver Figura 5.33). Podemos observar que, em todos os pontos dos caminhos C_1 e C_3, o campo $\vec{v}$ é normal a C. Portanto, para estes caminhos, a componente tangencial de $\vec{f}$ é nula. Da Proposição 5.3.5, segue que

$$\int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ e } \int_{C_3} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0.$$

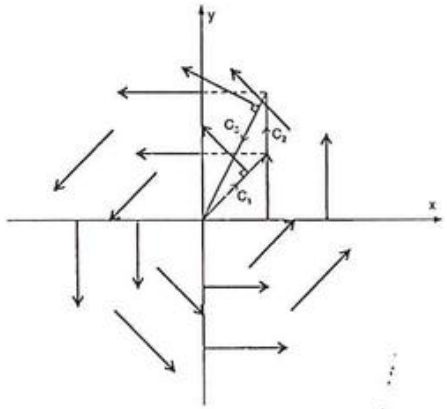


Figura 5.33

Basta então, calcular $\int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{r}$.

Como uma parametrização de C_2 é dada por $\vec{r}(t) = (1, t)$, $t \in [1, 2]$, usando a equação (3), temos

$$\int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (-t, 1) \cdot (0, 1)\, dt$$

$$= \int_1^2 dt$$

$$= 1.$$

Logo, a circulação do fluido em torno de C é igual a 1.

5.4 EXERCÍCIOS

1. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{f} = \left(\frac{1}{x+2}, \frac{1}{y+3}\right)$ para deslocar uma partícula em linha reta do ponto $P(3, 4)$ até $Q(-1, 0)$.

2. Determinar o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva $y = 1/x$ do ponto $(1, 1)$ ao ponto $(2, 1/2)$.

3. Determinar o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x, y, z) = (x, 0, 2z)$ para deslocar uma partícula ao longo da poligonal que une os pontos $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$ e $D(1, 1, 1)$ no sentido de A para D.

4. Determinar o trabalho realizado pela força constante $\vec{f} = \vec{i} + \vec{j}$ para deslocar uma partícula ao longo da reta $x + y = 1$ do ponto $A(0, 1)$ a $B(1, 0)$.

5. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{f} = (y, z, x)$ para deslocar uma partícula ao longo da hélice $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2t)$ de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

6. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{f} = 2\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$, sobre uma partícula ao longo de C, onde C é mostrado na Figura 5.34.

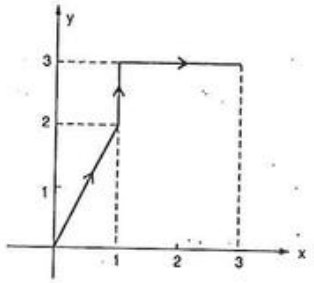


Figura 5.34

7. Determinar o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x, y, z) = (y, x, z^2)$ para deslocar uma partícula ao longo da hélice dada por $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2t)$, do ponto $A(2, 0, 0)$ ao ponto $B(2, 0, 4\pi)$.

8. Um campo de forças é dado por $\vec{f}(x, y) = \dfrac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, onde $\vec{r} = (x, y)$. Sob a ação desse campo, uma partícula desloca-se sobre a curva $x^2 + 4y^2 = 16$, no sentido anti-horário, do ponto $A(4, 0)$ ao ponto $B(0, 2)$. Determinar o trabalho realizado por $\vec{f}$ nesse deslocamento.

9. Um campo é formado por uma força $\vec{f}$, de módulo igual a 4 unidades de força, que tem a direção do semi-eixo positivo dos x. Achar o trabalho deste campo, quando um ponto material descreve, no sentido horário, a quarta parte do círculo $x^2 + y^2 = 4$, que está no 1º quadrante.

10. Achar o trabalho de uma força variável, dirigida à origem das coordenadas, cuja grandeza é proporcional ao afastamento do ponto em relação à origem das coordenadas, se o ponto de aplicação desta força descreve, no sentido anti-horário, a parte da elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ no 1º quadrante.

Nos exercícios de 11 a 17 determinar a integral curvilínea do campo vetorial $\vec{f}$, ao longo da curva C dada.

11. $\vec{f}(x, y) = (|x|, y)$; C é o quadrado de vértices $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ no sentido anti-horário.

12. $\vec{f}(x, y, z) = (x^2, 1\,y, xz)$; C é o segmento de reta que une o ponto $A(2, 1, 0)$ ao ponto $B(0, 2, 2)$.

13. $\vec{f}(x, y) = (x^2y, xy)$; C é o arco da parábola $x = y^2$, do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(4, 2)$.

14. $\vec{f}(x, y) = (x^2y, xy)$; C é o segmento de reta que une o ponto $(0, 0)$ ao ponto $(4, 2)$.

15. $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$; C é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e $z = y$ orientada no sentido anti-horário.

16. $\vec{f}(x, y) = (x, y)$; C é a curva dada por $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$, $t \in [-1, 1]$.

17. $\vec{f}(x, y, z) = (-yz, xz, xy)$; C é a elipse $x^2 + 9y^2 = 36$ no plano $z = 2$, orientada no sentido anti-horário.

Nos exercícios de 18 a 25 calcular as integrais curvilíneas dadas:

18. $\displaystyle\int_C [x\,dx + y\,dy]$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ no sentido anti-horário.

19. $\displaystyle\int_C |x|\ dy$, onde C é o segmento de reta $x = 2y - 1$ do ponto $A(-3, -1)$ ao ponto $B(1, 1)$.

20. $\displaystyle\int_C [x^2dx + y^2dy + z^2dz]$, onde C é o arco de hélice circular dado por $\vec{r}(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 8t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

21. $\displaystyle\int_C [z\,dx + y\,dy - x\,dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $y + z = 8$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$. Considerar os dois possíveis sentidos de percurso.

22. $\displaystyle\int_C [dx + dy + dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $y + z = 5$ e $z = 4 - x^2$ do ponto $A(2, 5, 0)$ ao ponto $B(-2, 5, 0)$.

23. $\displaystyle\int_C [x\,dx + y\,dy + x\,dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x = 2$ do ponto $A\left(2, -\sqrt{12}, 4\right)$ ao ponto $B\left(2, \sqrt{12}, 4\right)$.

24. $\displaystyle\int_C [y\,dx + z\,dy - xy\,dz]$, onde C é dado por $y = \operatorname{sen} x$; $z = 4$; $x \in [0, 2\pi]$.

25. $\displaystyle\int_C y\,e^{xy}dx$ onde C é dado por $y = x^2$, $x \in [-1, 0]$.

26. Calcular a integral $I = \displaystyle\int_C \left[xe^x dx - (x + 2y)\ dy\right]$, onde C é:

a) o segmento de reta de (0, 0) a (–1, –2);

b) a trajetória parabólica $y = -2x^2$ de (0, 0) a (–1, –2);

c) a poligonal de (0, 0) a (0, 1) a (–1, –2).

27. Calcular a integral do campo vetorial $\vec{f} = (2xy,\ x^2,\ 3z)$, do ponto $A(0, 0, 0)$ ao ponto $B(1, 1, 2)$, ao longo dos seguintes caminhos:

a) segmento de reta que une os pontos dados;

b) intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x = y$;

c) poligonal $A\,C\,B$, onde $C = (3, 3, 1)$.

28. Resolver o exercício 27 para $\vec{f} = (3xz,\ 4yz,\ 2xy)$.

29. Calcular a integral do campo vetorial $\vec{f} = (-y,\ x)$ ao longo dos seguintes caminhos fechados, no sentido anti-horário:

a) circunferência de centro na origem e raio 2;

b) elipse $x^2 + 36y^2 = 36$;

c) triângulo de vértices (1, 1), (–1, 1) e (0, –1).

30. Resolver o exercício 29 para $\vec{f} = (xy^2,\ x^2y)$.

31. Calcular a integral $I = \int_C (e^x dx + z dy + \cos y\, dz)$ ao longo de C, onde C é mostrado nas Figuras 5.35, 5.36 e 5.37.

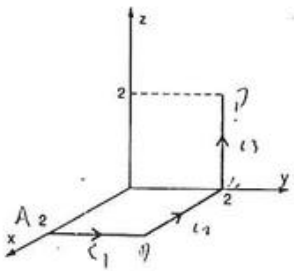


Figura 5.35

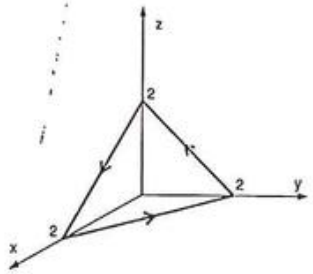


Figura 5.36

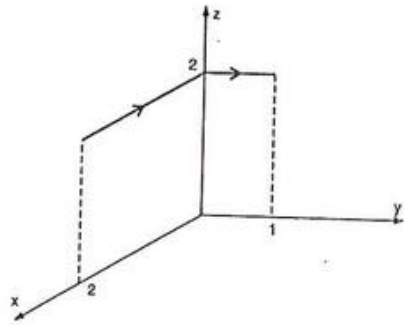


Figura 5.37

32. O campo de velocidades de um fluido em movimento é dado por $\vec{v} = (x,\ -y)$. Calcular a circulação do fluido ao redor da curva fechada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde

C_1: segmento de reta de $A(0, 0)$ e $B(1, 1)$;

C_2: parte da curva $4x^2 - 12x + 4y^2 - 8y + 12 = 0$ do ponto $B(1, 1)$ a $C(2, 1)$;

C_3: segmento de reta CA.

33. O campo de velocidades de um fluido em movimento é dado por $\vec{v} = (2x,\ 2y,\ -z)$. Calcular a circulação do fluido ao redor da curva fechada C, onde C é dada por $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + 2\vec{k},\ t \in [0,\ 2\pi]$.

34. O campo de velocidades de um fluido em movimento é dado por $\vec{v} = (2x,\ -y)$. Calcular a circulação do fluido ao redor da curva fechada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ representada na Figura 5.38.

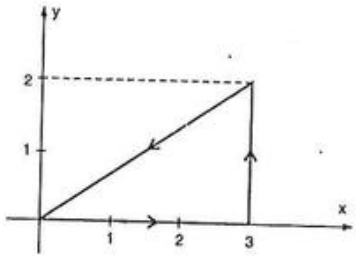


Figura 5.38

35. O campo de velocidades de um fluido em movimento é dado por $\vec{v} = (y, -x)$. Determinar a circulação do fluido ao redor do triângulo de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ e $C(2, 2)$. Qual o sentido segundo o qual o fluido gira ao redor da curva dada?

36. O campo de velocidades de um fluido em movimento é dado por $\vec{v} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$, onde $\vec{r} = (x, y)$. Determinar a circulação do fluido ao redor da curva fechada formada pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ e $C(-2, 0)$ e a semicircunferência $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

37. O campo de velocidades de um fluido em movimento é dado por $\vec{v} = 3\vec{j} + \vec{k}$. Determinar a circulação do fluido ao redor do quadrado de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 0, 2)$ e $D(0, 0, 2)$.

5.5 Integrais Curvilíneas Independentes do Caminho de Integração

Para introduzir as integrais curvilíneas independentes do caminho de integração, vamos analisar o Exemplo 5.3.6 (i) e o exemplo que segue.

5.5.1 Exemplo

Calcular $\displaystyle\int_C [\operatorname{sen} x\,dx - 2yz\,dy - y^2 dz]$ ao longo de C, de $A(0, 2, 0)$ até $B(2, 2, 4)$, onde C:

a) é a parábola $z = x^2$, $y = 2$.

b) é a poligonal AMB, $M(1, 0, 0)$.

Solução de (a). A Figura 5.39 mostra o caminho C de integração. Usando x como parâmetro, temos

$$\int_C [\operatorname{sen} x\,dx - 2yz\,dy - y^2 dz] =$$

$$= \int_0^2 [\operatorname{sen} x \,.\, 1 - 2.2.\, x^2.0 - 2^2.2x]\, dx$$

$$= -15 - \cos 2.$$

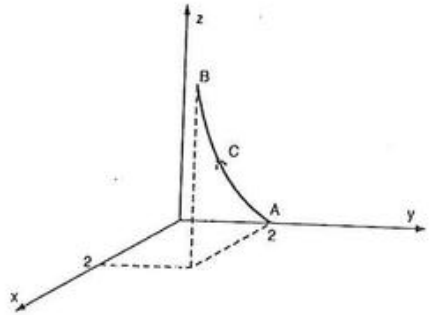


Figura 5.39

Solução de (b). O caminho C de integração pode ser visto na Figura 5.40.

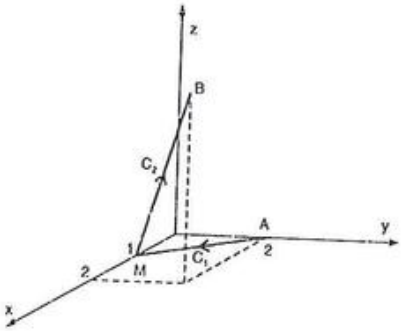


Figura 5.40

Para calcular a integral, dividimos C em dois caminhos C_1 e C_2. O caminho C_1 tem equação vetorial

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (2 - 2t)\vec{j}, \quad t \in [0, 1].$$

Temos, então

$$\int_{C_1} (\text{sen}x\,dx - 2yz\,dy - y^2dz) =$$

$$= \int_0^1 [\text{sen}t - 2(2-2t).0.(-2) - (2-2t)^2.0]\,dt$$

$$= \int_0^1 \text{sen}t\,dt$$

$$= -\cos 1 + 1.$$

O caminho C_2 tem equação vetorial

$$\vec{r}(t) = (1+t)\vec{i} + 2t\vec{j} + 4t\vec{k}, \quad t \in [0, 1].$$

Logo,

$$\int_{C_2} (\text{sen}x\,dx - 2yz\,dy - y^2\,dz) =$$

$$= \int_0^1 [\text{sen}(1+t) - 2.2t.4t.2 - (2t)^2.4]\,dt$$

$$= -\cos 2 + \cos 1 - 16.$$

Portanto,

$$\int_C (\text{sen}x\,dx - 2yz\,dy - y^2\,dz) = \int_{C_1} (\text{sen}x\,dx - 2yz\,dy - y^2dz) + \int_{C_2} (\text{sen}x\,dx - 2yz\,dy - y^2\,dz)$$

$$= -\cos 1 + 1 - \cos 2 + \cos 1 - 16$$

$$= -\cos 2 - 15.$$

Observando os dois exemplos citados, vemos que, no primeiro, a integral $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, foi calculada de A até B ao longo de dois caminhos distintos e os resultados encontrados foram diferentes. No segundo exemplo, a integral dada foi calculada, de A até B, ao longo de caminhos distintos, no entanto, os resultados encontrados foram iguais. Temos a seguinte definição.

5.5.2 Definição

Seja $\vec{f}$ um campo vetorial contínuo em um domínio D do espaço. A integral

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

é dita independente do caminho de integração em D se, para qualquer par de pontos A e B em D, o valor da integral é o mesmo para todos os caminhos em D, que iniciam em A e terminam em B.

Pode nos ocorrer uma série de perguntas:

(i) Como identificar uma integral de linha independente do caminho de integração?

(ii) Podemos calculá-la conhecendo apenas os pontos A e B?

(iii) O que acontecerá se o caminho de integração for fechado?

Estas perguntas são respondidas com auxílio da Definição 4.10.1, Teorema 4.10.3 e com os teoremas que seguem.

5.5.3 Teorema

Seja $u = u(x, y, z)$ uma função diferenciável em um domínio conexo $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f} = \nabla u$ é contínuo em U. Então,

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = u(B) - u(A),$$

para qualquer caminho C em U, unindo o ponto A ao ponto B.

Prova. Sejam A e B dois pontos quaisquer em U. Vamos unir A e B através de um caminho suave C. Seja $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, uma parametrização de C. Então,

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla u \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_a^b \nabla u[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}'(t)\, dt.$$

Seja $g(t) = u[\vec{r}(t)]$, $t \in [a, b]$. Pela regra da cadeia, temos

$$g'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt},$$

onde as derivadas parciais de u são calculadas nos ponto $(x(t), y(t), z(t))$. Portanto,

$$g'(t) = \nabla u[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}'(t).$$

Como $\vec{f} = \nabla u$ é contínuo e C é suave, $g'(t)$ é contínua em $[a, b]$. Podemos, então, aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo e escrever

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b g'(t)\, dt$$

$$= g(t)\Big|_a^b$$

$$= u[\vec{r}(t)]\Big|_a^b$$

$$= u[\vec{r}(b)] - u[\vec{r}(a)]$$

$$= u(B) - u(A).$$

Observamos que se o caminho entre A e B fosse suave por partes, faríamos a mesma demonstração sobre cada parte suave.

5.5.4 Exemplos

(i) Calcular a integral $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f}$ é o campo vetorial do Exemplo 4.10.6 (i), ao longo de qualquer caminho que une o ponto $A(0, 0, 1)$ a $B(1, 2, 1)$.

Solução. No Exemplo 4.10.6 (i), verificamos que

$$\vec{f} = (yz + 2)\vec{i} + (xz + 1)\vec{j} + (xy + 2z)\vec{k}$$

é o gradiente da função $u = xyz + 2x + y + z^2 + C$.

Usando o Teorema 5.5.3, escrevemos

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_C [(yz + 2)\, dx + (xz + 1)\, dy + (xy + 2z)\, dz]$$

$$= u(1, 2, 1) - u(0, 0, 1)$$

$$= 6.$$

(ii) Verificar que o campo vetorial $\vec{f} = \operatorname{sen} x\, \vec{i} - 2yz\vec{j} - y^2\vec{k}$, do Exemplo 5.5.1, é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ ao longo de qualquer caminho C de $A(0, 2, 0)$ até $B(2, 2, 4)$.

Solução. O campo vetorial $\vec{f}$ é um campo tal que f_1, f_2 e f_3 são funções contínuas que possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em $\mathbb{R}^3$. Como

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = -2y, \vec{f} \text{ admite uma função potencial } u, \text{ ou seja, } \vec{f} \text{ é um campo conservativo.}$$

Para calcular a integral dada, vamos determinar uma função potencial $u = u(x, y, z)$ de $\vec{f}$. Para isso, procedemos de forma análoga ao Exemplo 4.10.6.

Temos,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{sen} x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2yz \text{ e } \frac{\partial u}{\partial z} = -y^2.$$

Integrando a primeira equação em relação a x, obtemos

$$u = \int \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= -\cos x + a(y, z).$$

Derivando este resultado em relação a y, e usando a igualdade $\frac{\partial u}{\partial y} = -2yz$, vem $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y} = -2yz$. Portanto,

$$a = \int -2yz\, dy$$

$$= -zy^2 + b(z).$$

Substituindo este resultado na expressão de u, obtemos

$$u = -\cos x - zy^2 + b(z).$$

Derivando este resultado em relação a z e usando $\frac{\partial u}{\partial z} = -y^2$, vem

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -y^2 + \frac{db}{dz} = -y^2$$

$$\frac{db}{dz} = 0,\ b = C,\ C \text{ constante.}$$

Finalmente, obtemos $u = -\cos x - zy^2 + C$.

Logo,

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_C (\operatorname{sen} x\, dx - 2yz\, dy - y^2\, dz)$$

$$= u(2,2,4) - u(0,2,0)$$

$$= -\cos 2 - 15.$$

5.5.5 Teorema

Se $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ é um campo vetorial contínuo em um domínio conexo $U \subset \mathbb{R}^3$, são equivalentes as três afirmações seguintes:

a) $\vec{f}$ é o gradiente de uma função potencial u em U, ou seja, $\vec{f}$ é conservativo em U.

b) A integral de linha de $\vec{f}$ é independente do caminho de integração em U.

c) A integral de linha de $\vec{f}$ ao redor de todo caminho fechado simples em U é igual a zero.

Prova parcial. Vamos demonstrar que (b) implica (c), (c) implica (b) e (a) implica (c).

(b) $\Rightarrow$ (c).

Vamos supor que a integral

$$\int_C [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz]$$

é independente do caminho de integração em U.

Seja C um caminho fechado simples em U. Dividimos C em dois pedaços C_1 e C_2, conforme Figura 5.41.

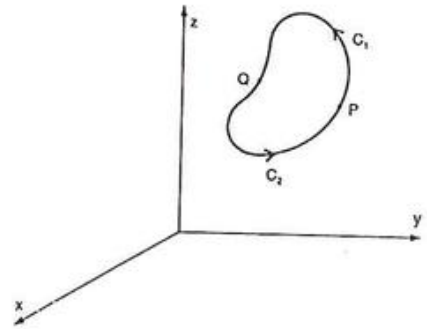


Figura 5.41

Então,

$$\int_C [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz] = \int_{C_1} [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz] + \int_{C_2} [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz].$$

Como a integral é independente do caminho de integração, usando 5.3.4 (d), podemos escrever

$$\int_{C_2} [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz] = \int_{-C_1} [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz]$$

$$= -\int_{C_1} [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz]$$

Portanto, segue que

$$\int_C [f_1dx + f_2dy + f_3dz] = 0.$$

$(c) \Rightarrow (b)$.

Vamos supor que $\int_C [f_1dx + f_2dy + f_3dz] = 0$ ao longo de qualquer caminho fechado simples em U.

Sejam P e Q dois pontos quaisquer de U e C_1 e C_2 dois caminhos em U que unem P e Q e não se interceptam (ver Figura 5.42). Então, $C = C_1 \cup -C_2$ é um caminho fechado simples.

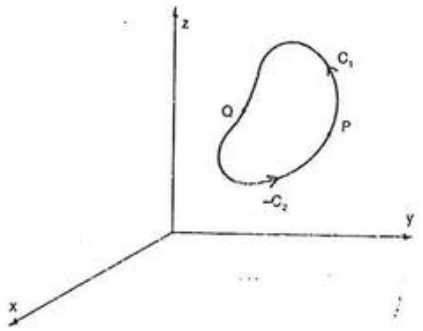


Figura 5.42

Temos,

$$\int_{C_1} [f_1dx + f_2dy + f_3dz] + \int_{-C_2} [f_1dx + f_2dy + f_3dz] =$$

$$= \oint_C [f_1dx + f_2dy + f_3dz]$$

$$= 0.$$

Portanto,

$$\int_{C_1} [f_1dx + f_2dy + f_3dz] = -\int_{-C_2} [f_1dx + f_2dy + f_3dz]$$

$$= \int_{C_2} [f_1dx + f_2dy + f_3dz].$$

Se os caminhos se interceptam em um ponto M (ver Figura 5.43), podemos dividir os caminhos C_1 e C_2, aplicar a propriedade 5.13 (c) e usar o raciocínio anterior sobre cada parte. O mesmo raciocínio é válido para um número finito de intersecções.

Logo,

$\int_C [f_1dx + f_2dy + f_3dz]$ é independente do caminho de integração em U.

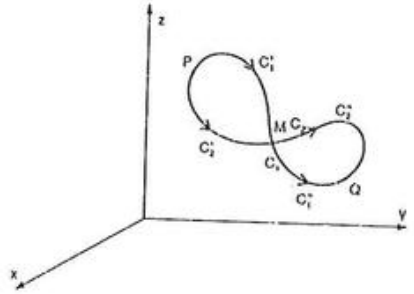


Figura 5.43

$(a) \Rightarrow (c)$.

Se $\vec{f}$ é o gradiente de uma função potencial u em U, pelo Teorema 5.5.3, temos

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = u(B) - u(A),$$

para qualquer caminho C em U de A até B.

Se o caminho C for fechado, o ponto A coincide com B, e portanto,

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0.$$

5.5.6 Exemplos

(i) Verificar se $\vec{f} = (e^{x+y} + 1)\vec{i} + e^{x+y}\vec{j}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$. Em caso afirmativo, calcular

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

onde a notação $\int_{(1,0)}^{(1,1)}$ significa integral de linha ao longo de qualquer caminho de (1,0) a (1,1).

Solução. O campo vetorial $\vec{f}$ é um campo tal que f_1 e f_2 são funções contínuas e possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Como

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^{x+y},$$

$\vec{f}$ admite uma função potencial u, ou seja, $\vec{f}$ é um campo conservativo.

Portanto, pelo Teorema 5.5.5, $\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{f} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho de integração em $\mathbb{R}^2$. Para calcular a integral, vamos encontrar a função potencial u e usar o Teorema 5.5.3.

Temos,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y} + 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+y}.$$

Integrando $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y} + 1$, em relação a x, vem

$$u = \int (e^{x+y} + 1)\, dx$$

$$= e^{x+y} + x + a(y).$$

Derivando este resultado em relação a y e usando a igualdade $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+y}$, vem

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+y} + 0 + \frac{da}{dy} = e^{x+y}$$

$$\frac{da}{dy} = 0; \quad a = C, \quad C \text{ constante.}$$

Obtemos, então

$$u = e^{x+y} + x + C.$$

Logo,

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{(1,0)}^{(1,1)} [(e^{x+y} + 1)\, dx + e^{x+y}\, dy]$$

$$= u(1,1) - u(1,0)$$

$$= e^2 - e.$$

(ii) Determinar o trabalho realizado pela força

$\vec{f} = (yz + 1)\vec{i} + (xz + 1)\vec{j} + (xy + 1)\vec{k}$, no deslocamento:

a) ao longo da poligonal $ABCDE$ da Figura 5.44 (a);

b) ao longo do caminho fechado da Figura 5.44 (b).

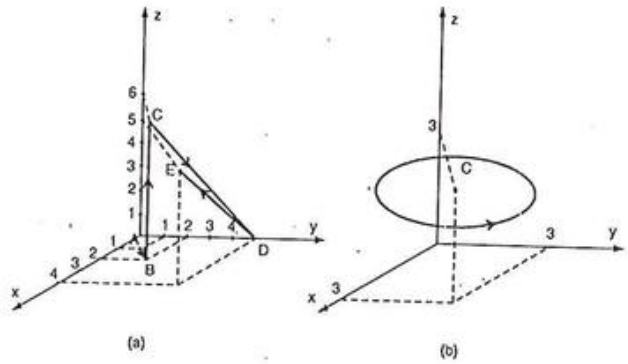


Figura 5.44

Solução. É conveniente verificar, inicialmente, se $\vec{f}$ é conservativo. Em caso afirmativo, podemos usar os Teoremas 5.5.3 e 5.5.5.

O campo de forças $\vec{f}$ é tal que f_1, f_2 e f_3 são funções contínuas que possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em $\mathbb{R}^3$. Como

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = z,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = y \text{ e}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = x,$$

$\vec{f}$ admite uma função potencial u, isto é, $\vec{f}$ é um campo de forças conservativo.

a) Para resolver este item, vamos encontrar uma função potencial u de $\vec{f}$. Temos,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz + 1 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial z} = xy + 1.$$

Integrando $\frac{\partial u}{\partial x} = yz + 1$ em relação a x, obtemos

$$u = \int (yz + 1)\, dx$$

$$= yzx + x + a(y, z).$$

Derivando este resultado em relação a y e usando $\frac{\partial u}{\partial y} = xz + 1$, vem

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz + 0 + \frac{\partial a}{\partial y} = xz + 1,$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 1$$

$$a = \int dy = y + b(z).$$

Substituindo este valor na expressão de u, temos

$$u = xyz + x + y + b(z).$$

Derivando este resultado em relação a z e usando

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy + 1, \text{ vem}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy + 0 + 0 + \frac{db}{dz} = xy + 1,$$

$$\frac{db}{dz} = 1$$

$$b = \int dz = z + C, \ C \text{ constante.}$$

Logo, a função potencial é dada por

$$u = xyz + x + y + z + C.$$

Usando o Teorema 5.5.3, vem

$$w = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{(1,1,0)}^{(4,5,5)} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$= u(4,5,5) - u(1,1,0)$$

$$= 112 \text{ unidades de trabalho.}$$

Observamos que o trabalho poderia ser calculado diretamente, usando 5.3.1(2), ao longo de qualquer caminho de A até E. Poderíamos tomar, por exemplo, o segmento de reta $\overline{AE}$.

b) $w = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$

$= 0$ unidades de trabalho, já que a curva C é fechada.

(iii) Calcular $\int_C \left[\frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \right]$

onde C é dado na Figura 5.45.

Solução. O campo vetorial $\vec{f} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}$ já foi analisado no Exemplo 4.10.4(c). Este campo é conservativo em qualquer domínio simplesmente conexo que não contém a origem.

a) Para a curva C dada na Figura 5.45(a) não encontramos dificuldades, pois C está contida em um domínio simplesmente conexo que não contém a origem.

Portanto, pelo Teorema 5.5.5, temos que

$$\oint_C \left[\frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy\right] = 0.$$

b) Para a curva C dada na Figura 5.45(b) não podemos aplicar o Teorema 5.5.5. Neste caso, para resolver a integral, vamos parametrizar a curva C e usar a Equação 5.3.3(4).

Temos,

$$C:\ \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j},\ t \in [0,\ 2\pi]$$

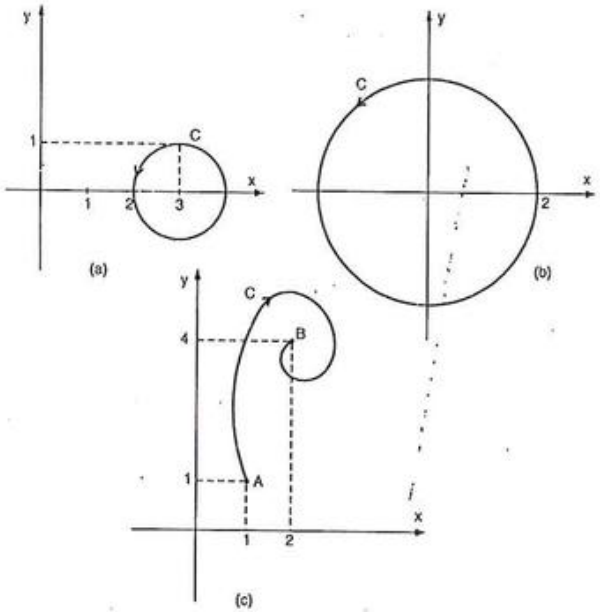


Figura 5.45

Então,

$$\oint_C \left[\frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy\right] = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-2\operatorname{sen} t}{4}(-2\operatorname{sen} t) + \frac{2\cos t}{4}(2\cos t)\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt$$

$$= 2\pi.$$

Como o resultado desta integral foi diferente de zero, a integral de $\vec{f}$ em um domínio U que contém C, depende do caminho de integração.

Voltando ao Exemplo 4.10.4(c), podemos afirmar que $\vec{f}$ não é conservativo no domínio $D_2 = \{(x,\ y) | 1 < x^2 + y^2 < 16\}$.

c) A Figura 5.46 mostra um domínio simplesmente conexo U, que contém C da Figura 5.45(c) e não contém a origem.

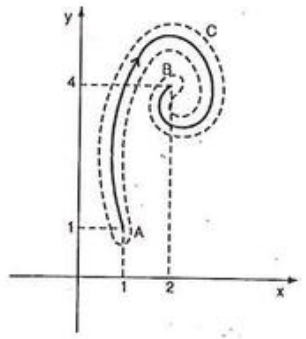


Figura 5.46

Então, para calcular a integral ao longo de C, podemos encontrar uma função potencial u de $\vec{f}$ em U e usar o Teorema 5.5.3.

Temos,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Integrando (1) em relação a x, obtemos

$$u = \int \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx$$

$$= -\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + a(y).$$

Derivando este resultado em relação a y e usando (2), vem

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{da}{dy} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{da}{dy} = 0, \quad a = C, \quad C \text{ constante.}$$

Obtemos, então,

$$u = -\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + C$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + C.$$

Logo,

$$\int_C \left[\frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \right] = u(B) - u(A)$$

$$= \operatorname{arc\,tg} 2 - \frac{\pi}{4}.$$

5.6 EXERCÍCIOS

1. Verificar se o campo de forças $\vec{f}$ é conservativo. Em caso afirmativo, determinar uma função potencial para este campo e calcular o trabalho que ele faz sobre uma partícula que se desloca de $A(1, -1, 0)$ a $B(2, 3, 1)$.

   a) $\vec{f} = (2y^2x^2z,\ 3y^2x^2z,\ y^3x^2 + y)$

   b) $\vec{f} = (y\cos xy + ye^{xy})\vec{i} + (x\cos xy + xe^{xy})\vec{j} + \vec{k}$

   c) $\vec{f} = (yz + \cos x)\vec{i} + (xz - \operatorname{sen} y)\vec{j} + xy\,\vec{k}$.

2. Verificar se o campo vetorial dado é conservativo. Em caso positivo, determinar uma função potencial para $\vec{f}$ e o valor da integral $\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   a) $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xz + 8y, xy)$

   b) $\vec{f}(x, y, z) = ((x + y + z)^{4/3}, (x + y + z)^{4/3}, (x + y + z)^{4/3})$

   c) $\vec{f}(x, y, z) = (3x^2 + y, 4y^2 + 2x, 8xy)$

   d) $\vec{f}(x, y, z) = (e^x(\cos y + \operatorname{sen} z), -e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos z)$

   e) $\vec{f}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$.

3. Calcular a integral $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ onde $\vec{f}$ é o campo vetorial dado, ao longo de qualquer caminho que une o ponto $A(1,1,0)$ ao $B(1,2,-1)$.

   a) $\vec{f} = (\operatorname{sen} x + 2y)\vec{i} + (2x + \cos z)\vec{j} + (z - y\operatorname{sen} z)\vec{k}$

   b) $\vec{f} = \left(e^x + e^{z^2}\right)\vec{i} + \left(e^x + z\right)\vec{j} + \left(2xze^{z^2} + y\right)\vec{k}$

   c) $\vec{f} = \left(2x^2y + y^2 + z\right)\vec{i} + \left(\frac{2}{3}x^3 + 2xy + z^2\right)\vec{j} + (x + 2yz)\vec{k}$.

4. Verificar que as integrais são independentes do caminho de integração e determinar seus valores.

   a) $\int_{(1,1)}^{(5,3)} (x\,dx + y\,dy)$

   b) $\int_{(0,0)}^{(2,1)} (-e^x \cos y\,dx + e^x \operatorname{sen} y\,dy)$

   c) $\int_{(0,1,1)}^{(1,0,1)} (2xy\,dx + x^2\,dy + 2dz)$

d) $\int_{(-1,0,0)}^{(2,2,3)} (dy + dz)$

e) $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} [2x \operatorname{sen} z\, dx + (z^3 - e^y)dy + (x^2 \cos z + 3yz^2)dz]$

f) $\int_{(-1,0,0)}^{(1,1,1)} [e^y dx + (xe^y + e^z)dy + (ye^z - 2e^{-2z})dz]$

g) $\int_{(0,0)}^{(\pi,1)} (e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy)$.

5. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}\right)$, ao longo dos seguintes caminhos.

a) circunferência de centro em (4,4) e raio 2, no sentido anti-horário;

b) poligonal $ABCD$, onde $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(2,1)$ e $D(2,2)$, de A até D;

c) quadrado de vértices $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,-1)$ e $D(2,-1)$ no sentido anti-horário;

d) circunferência de centro na origem e raio 4, no sentido anti-horário.

6. Calcular $\int_C [(2xz + y^2)dx + 2xy\, dy + x^2 dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x + y = 2$ do ponto $A(2,0,4)$ a $B(0,2,4)$.

7. Determinar o trabalho realizado pela força conservativa $\vec{f} = (yz,\ xz,\ xy + 1)$ nos seguintes deslocamentos:

a) ao longo da elipse $x^2 + y^2/4 = 9$, no sentido anti-horário, do ponto $A(3,0)$ ao $B(0,6)$;

b) ao longo do arco de parábola $x = y^2 - 1$, $z = 2$, do ponto $A(-1,0,2)$ ao ponto $B(3,-2,2)$;

c) ao longo do caminho fechado formado pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$, no sentido anti-horário.

8. Calcular $\int_C \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\right]$, ao longo dos seguintes caminhos:

a) circunferência de centro (2,0) e raio 1 no sentido anti-horário;

b) $\vec{r}(t) = (t, 1/t)$, $t \in [1, 4]$;

c) poligonal ABC onde $A(1,1)$, $B(3,3)$ e $C(4, 1/4)$;

d) circunferência de centro na origem e raio 1, no sentido anti-horário.

9. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, $\vec{r} = (x,\ y,\ z)$, ao longo dos seguintes caminhos:

a) elipse $x^2/4 + y^2 = 4$, $z = 2$, uma volta completa no sentido anti-horário;

b) quadrado $|x| + |y| = 1$, $z = 0$, no sentido anti-horário;

c) segmento de reta que une o ponto $A(0,1,0)$ ao $B(1,0,\sqrt{3})$;

d) intersecção das superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 2$, do ponto $A(2,0,2)$ ao $B(2,4,2\sqrt{5})$.

10. Uma partícula de massa m move-se no plano xy sob a influência da força gravitacional $\vec{F} = -mg\vec{j}$. Se a partícula move-se de (0,0) a (−2,1) ao longo de um caminho C, mostre que o trabalho realizado por $\vec{F}$ é $w = -mg$ e é independente do caminho.

11. Determinar as seguintes integrais ao longo dos caminhos fechados:

a) $\oint_C [(2xy + 4)dx + (x^2 + z^2)dy + 2zydz]$

C: $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ \pi)$, $t \in [0,\ 2\pi]$

b) $\oint_C [(xy + z)dx + (x - y)dy + 4zdz]$

C: $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ \pi)$, $t \in [0,\ 2\pi]$.

12. Determinar o trabalho realizado pela força $\vec{f} = (yze^{xz},\ e^{xz},\ xye^{xz} + 1)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva $y = \frac{2}{x}$, do ponto $A(-1,-2,0)$ ao $B(-2,-1,0)$. Esse trabalho é maior, menor ou igual ao trabalho realizado pela mesma força $\vec{f}$ para deslocar uma partícula em linha reta de A até B?

13. Determinar o trabalho realizado pela força $\vec{f} = (e^x + yz,\ xz,\ xy)$ para deslocar uma partícula ao longo da intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, do ponto $A(1,1,\sqrt{2})$ ao $B(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

14. Calcular $\int_C \left[\frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \right]$, onde C é dada nas Figuras 5.47, 5.48 e 5.49.

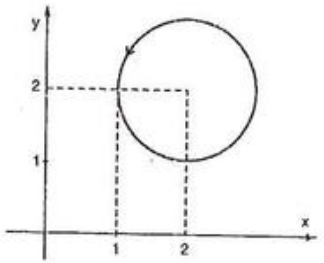


Figura 5.47

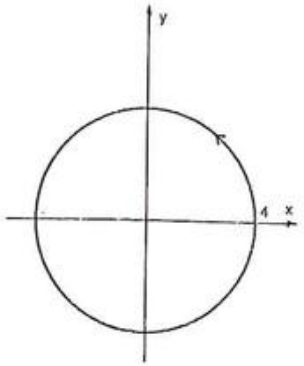


Figura 5.48

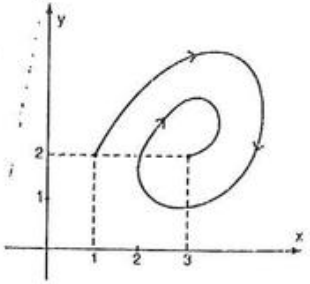


Figura 5.49

15. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{f} = (2x + z + 4)\vec{i} + (y^2 - 3z - 1)\vec{j} + (x - 3y + z)\vec{k}$, sobre uma partícula, ao longo de C, de $A(2,4,2)$ a $B(2,0,0)$, onde C é:

a) o segmento de reta AB;

b) a parábola $y = z^2$ no plano $x = 2$.

5.7 TEOREMA DE GREEN

Este teorema expressa uma integral curvilínea ao longo de uma curva fechada no plano, como uma integral dupla sobre a região limitada pela curva.

5.7.1 Teorema

Sejam C uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, e R a região fechada delimitada por C. Se $\vec{f} = (f_1, f_2)$ é um campo vetorial contínuo com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em um domínio D que contém R, então

$$\oint_C f_1\, dx + f_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\, dy \qquad (1)$$

Prova Parcial. Faremos a prova do teorema para o caso em que a curva C é suave e a região R pode ser descrita, simultaneamente, como indicado na Figura 5.50(a) e (b). Isto é,

$$R = \{(x, y) \mid a \le x \le b \text{ e } g_1(x) \le y \le g_2(x)\} \quad \text{e}$$

$$R = \{(x, y) \mid c \le y \le d \text{ e } h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

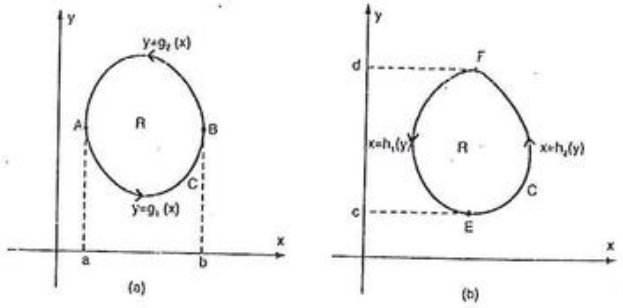


Figura 5.50

Para provar (1), basta mostrar que

$$\oint_C f_1 dx = -\iint_R \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy \tag{2}$$

e

$$\oint_C f_2 dy = \iint_R \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dxdy. \tag{3}$$

Vamos mostrar (2).

Observando a Figura 5.50(a), podemos ver que a curva C pode ser dividida em duas curvas C_1 e C_2, de equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente.

Usando x como parâmetro, obtemos uma parametrização de C_1, dada por

$$C_1\colon \vec{r}_1(x) = (x,\ g_1(x)),\ x \in [a,\ b].$$

Para a curva C_2 não podemos proceder da mesma forma, pois o sentido positivo determinado pelos valores crescentes de x em $[a, b]$, nos dá a orientação sobre C_2, no sentido oposto ao desejado. Podemos, porém, parametrizar $-C_2$ e usar a Propriedade 5.3.4(d). Temos,

$$-C_2\colon \vec{r}_2(x) = (x,\ g_2(x)),\ x \in [a,\ b].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\oint_C f_1 dx &= \int_{C_1} f_1 dx + \int_{C_2} f_1 dx \\ &= \int_{C_1} f_1 dx - \int_{-C_2} f_1 dx \\ &= \int_a^b f_1(x,\ g_1(x))\, dx - \int_a^b f_1(x,\ g_2(x))\, dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Por outro lado, como $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ é contínua, desenvolvendo o 2º membro de (2), temos

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy &= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dy\right] dx \\ &= \int_a^b \left[f_1(x, y)\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)}\right] dx \\ &= \int_a^b [f_1(x,\ g_2(x)) - f_1(x,\ g_1(x))]\, dx \\ &= -\int_a^b [f_1(x,\ g_1(x)) - f_1(x,\ g_2(x))]\, dx \end{aligned} \tag{5}$$

A partir das expressões (4) e (5), obtemos

$$\oint_C f_1 dx = -\iint_R \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy.$$

Para mostrar (3) procede-se de forma análoga, utilizando

$$R = \{(x, y) \mid c \le y \le d \ \text{ e } \ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

Observamos que o Teorema de Green também é válido para uma região R que contenha buracos. Neste caso, o caminho de integração C é todo o contorno de R, orientado de maneira que a região R se encontre à esquerda, como mostra a Figura 5.51.

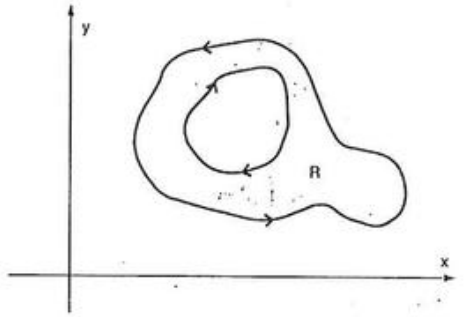


Figura 5.51

5.7.2 Exemplos

(i) Usando o Teorema de Green calcular $\oint_C [y^2\,dx + 2x^2\,dy]$, sendo C o triângulo de vértices (0,0), (1,2) e (0,2), no sentido anti-horário.

Solução. A Figura 5.52 mostra o caminho C de integração e a região R delimitada por C.

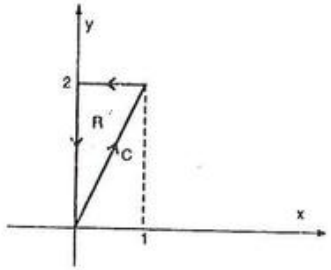


Figura 5.52

Como R é dada por

$$0 \le x \le 1$$

$$2x \le y \le 2,$$

usando o Teorema de Green, temos

$$\oint_C [y^2\,dx + 2x^2\,dy] = \iint_R (4x - 2y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{2x}^2 (4x - 2y)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 (4xy - y^2) \Big|_{2x}^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 [(8x - 4) - (8x^2 - 4x^2)]\,dx$$

$$= -4/3.$$

Observamos que, neste exemplo, para calcular a integral curvilínea diretamente, teríamos que dividir a curva C em três partes suaves, calculando a integral sobre cada parte. A utilização do Teorema de Green simplificou os cálculos.

(ii) Calcular $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, ao longo da circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$, no sentido horário, sendo $\vec{f} = \left(4x^2 - 9y,\ 9xy + \sqrt{y^2+1}\right)$.

Solução. A Figura 5.53 mostra a curva C. Como C está orientada no sentido horário, não podemos aplicar o Teorema de Green diretamente. No entanto, podemos aplicar o Teorema de Green para calcular a integral sobre a curva $-C$ e depois usar a Propriedade 5.3.4(d). Temos,

$$\int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_R (9y + 9)\,dxdy$$

$$= 9\iint_R (y + 1)\,dxdy.$$

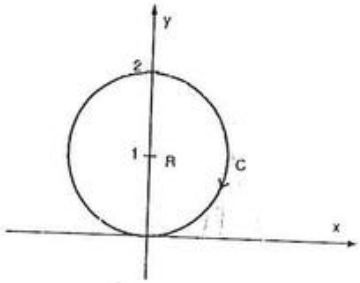


Figura 5.53

Passando para coordenadas polares, vem

$$\oint_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 9\int_0^{\pi} \left[\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} (r\operatorname{sen}\theta + 1)\,r\,dr \right] d\theta$$

$$= 9\int_0^{\pi} \left(\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

$$= 9\int_0^{\pi} \left(\frac{8}{3}\,\text{sen}^4\theta + 2\text{sen}^2\theta\right) d\theta$$

$$= 18\pi.$$

Logo, $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = -18\pi$.

(iii) Área de uma região plana como uma integral curvilínea ao longo de seu contorno.

Usando o Teorema de Green, podemos expressar a área de uma região plana R, como uma integral curvilínea ao longo de seu contorno.

Sejam R e C como no Teorema de Green. Sejam $\vec{f} = x\vec{j}$ e $\vec{g} = -y\vec{i}$. Os campos vetoriais $\vec{f}$ e $\vec{g}$ são contínuos com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Aplicando (1) ao campo $\vec{f}$, obtemos

$$\oint_C x\,dy = \iint_R dxdy.$$

Da mesma forma, aplicando (1) ao campo $\vec{g}$, vem

$$\oint_C -y\,dy = \iint_R dxdy.$$

Portanto, se denotamos por A a área de R, temos

$$A = \oint_C x\,dy \tag{6}$$

ou

$$A = \oint_C -y\,dx. \tag{7}$$

Combinando (6) e (7), obtemos uma terceira fórmula para a área de R, dada por

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx). \tag{8}$$

Eventualmente, outras fórmulas para a área podem ser encontradas, aplicando o Teorema de Green a outros campos vetoriais convenientes.

(iv) Calcular a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Solução. A elipse dada tem equação vetorial

$$\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 3\text{sen}t),\quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Usando (6), vem

$$A = \oint_C x\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 3\cos t\,dt$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$$

$$= 6\pi.$$

(v) Seja $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$. Dado o campo vetorial

$$\vec{f} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2},\ \frac{x}{x^2 + y^2}\right),$$

mostrar que $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ para toda curva fechada simples $C_1 \subset D$, suave por partes, orientada no sentido anti-horário e que circunda a origem.

Solução. Para resolver este exemplo, devemos voltar aos Exemplos 4.10.4(c) e 5.5.6(iii).

Seja $C_1 \subset D$ uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, que circunda a origem (ver Figura 5.54).

Sejam C_2 a curva que delimita D, orientada no sentido anti-horário e R a região compreendida entre as curvas C_1 e C_2. O contorno de R, orientado de maneira que R fique à esquerda, é formado pelas curvas $-C_1$ e C_2 (ver Figura 5.55).

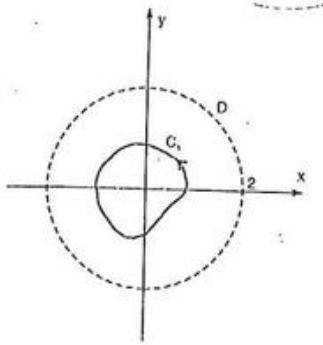


Figura 5.54

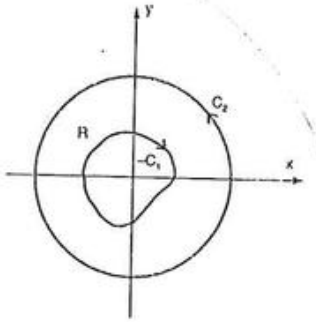


Figura 5.55

Aplicando o Teorema de Green, vem

$$\iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_{-C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Como $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\forall (x, y) \in R$ (ver Exemplo 4.10.4(c)), obtemos

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Como $\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ (ver Exemplo 5.5.6(iii)), segue que

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Observamos que, usando este resultado e o Teorema 5.5.5, podemos concluir que a integral curvilínea do campo $\vec{f}$ depende do caminho de integração em qualquer domínio que contém a origem.

5.8 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 11 calcular as integrais curvilíneas dadas usando o Teorema de Green.

1. $\oint_C [x^2 dx + (4x + y)\, dy]$, ao longo do triângulo de vértices (0,0), (1,2) e (2,0) no sentido anti-horário.

2. $\oint_C [(\ln x - 2y)dx + (2x + e^y)\, dy]$ ao longo da elipse $x^2 + y^2/9 = 1$ no sentido horário.

3. $\oint_C \left[\left(y^2 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx + (\ln y - 4x)\right] dx$ ao longo do retângulo de vértices (0,0), (3,0), (3,2) e (0,2), no sentido anti-horário.

4. $\oint_C \left(-2x^2 y\, dx + \sqrt{8 - \ln(y + 2)}\, dy\right)$ ao longo do paralelograma de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(3,2)$ e $D(1,2)$, no sentido horário.

5. $\oint_C (xdx + xy\, dy)$, ao longo do paralelograma de vértices $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(4,4)$ e $D(2,3)$ no sentido anti-horário.

6. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = (-3x^2 y,\ 3xy^2)$ e C é a circunferência $x^2 + y^2 + 4y = 0$ no sentido anti-horário.

7. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = (y,\ 0)$ e C é o triângulo de vértices $A(0,1)$, $B(3,1)$ e $C(2,2)$ no sentido horário.

8. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = (x^2 + 4xy,\ 2x^2 + 2x + y^2)$ e C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ no sentido anti-horário.

9. $\oint_C \left(\sqrt{y}\, dx + \sqrt{x}\, dy\right)$ onde C é o contorno formado pelas retas $y = 0$, $x = 1$ e a parábola $y = x^2$ no sentido anti-horário.

10. $\oint_C [e^x dx + (e^x + 1)\, dy]$ onde C é o triângulo $A(-1,2)$, $B(-3,1)$ e $C(1,0)$ no sentido anti-horário.

11. $\oint_C \left[\left(e^{x^3} + y^2\right) dx + \left(x + \sqrt{1 + y^2}\right) dy\right]$ onde C é o quadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1) no sentido horário.

12. Calcular a área da elipse $x = 6\cos\theta$, $y = 2\text{sen}\theta$.

13. Calcular a área da Figura 5.56.

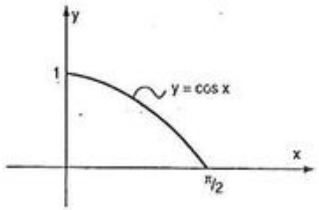


Figura 5.56

14. Determinar a área entre as elipses:

a) $4x^2 + y^2 = 4$ e $x^2/9 + y^2/4 = 1$

b) $x^2 + 9y^2 - 2x - 18y + 1 = 0$ e $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$.

15. Dado o campo vetorial $\vec{f} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$, mostrar que $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.

16. Dado o campo vetorial $\vec{f} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}\right)$, mostrar que $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = -2\pi$ para toda curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário que circunda a origem.

17. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = \left((x^3 + 2)\sqrt{x^4 + 8x} + y,\ 4x^2y\right)$ e C é a poligonal de vértices $A(1,0)$, $B(3,2)$, $C(0,2)$, $D(0,0)$, de A para D.

18. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = \left(2xy + xe^{3x^2+2},\ 4x^2 + \ln(y^2 + 4y + 2)\right)$ e C é a poligonal de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ e $D(-1,0)$ de A para D.

MAKRON Books

Capítulo 6

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Neste capítulo apresentaremos as integrais de superfície. Inicialmente, veremos alguns aspectos elementares da Teoria de Superfícies. O cálculo da área de uma superfície e outras aplicações serão analisadas no decorrer do capítulo.

6.1 REPRESENTAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE

Em geral, uma superfície S em $\mathbb{R}^3$ pode ser descrita como um conjunto de pontos (x, y, z), que satisfazem uma equação da forma

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

onde f é uma função contínua.

A equação (1) é chamada uma *representação implícita* de S.

Se for possível resolver a equação (1) para uma das variáveis em função das outras, obtemos uma *representação explícita* de S ou de parte de S.

6.1.1 Exemplos

(i) A equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (2)

é uma representação implícita da esfera de centro na origem e raio a.

Se resolvermos esta equação para z em função de x e y, obtemos duas soluções dadas por

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Cada uma das equações anteriores constitui uma representação explícita de parte da esfera. A primeira representa o hemisfério superior e a segunda o hemisfério inferior (ver Figura 6.1).

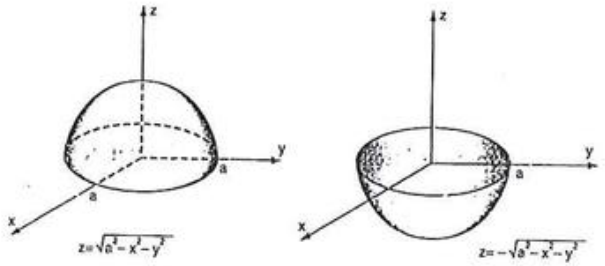


Figura 6.1

Resolvendo a equação (2) para x em função de y e z, obtemos as equações

$$x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \quad \text{e} \quad x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2},$$

que constituem outras representações explícitas de partes da esfera. A primeira equação representa o hemisfério da frente e a segunda o hemisfério de trás (ver Figura 6.2).

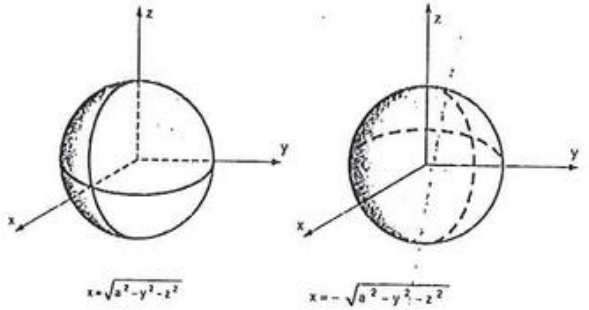


Figura 6.2

Analogamente, resolvendo a equação (2) para y em função de x e z, obtemos

$$y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}.$$

Neste caso, a primeira equação representa o hemisfério à direita e a segunda representa o hemisfério à esquerda (ver Figura 6.3).

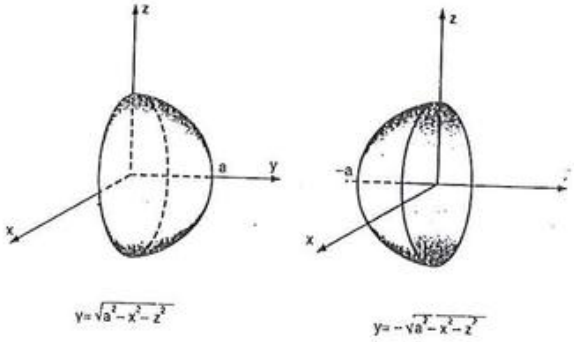


Figura 6.3

(ii) A equação $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = a$, $a > 0$, é uma representação implícita do plano inclinado que corta os eixos coordenados x, y e z nos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, 2a, 0)$ e $(0, 0, 3a)$, respectivamente (ver Figura 6.4).

As equações

$$x = a - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z,$$

$$y = 2\left(a - x - \frac{1}{3}z\right) \text{ e}$$

$$z = 3\left(a - x - \frac{1}{2}y\right)$$

constituem representações explícitas deste plano.

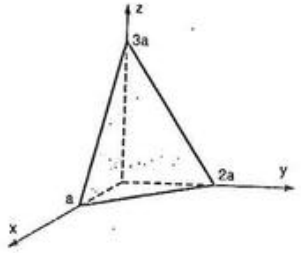


Figura 6.4

De maneira análoga à feita para curvas no espaço, podemos considerar representações paramétricas de uma superfície S.

6.1.2 Equações Paramétricas

Seja S uma superfície no espaço. Se os pontos de S são determinados pelas equações

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \tag{3}$$

onde x, y, z são funções contínuas das variáveis u e v, definidas em uma região conexa R do plano uv, as equações (3) são chamadas equações paramétricas de S.

Se denotamos por $\vec{r}(u, v)$ o vetor posição de um ponto qualquer $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ da superfície, temos

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},$$

(ver Figura 6.5).

Dessa forma, a superfície S, parametrizada pelas equações (3), pode ser representada pela equação vetorial

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}; \quad (u, v) \in R. \tag{4}$$

A equação (4) é chamada *representação vetorial* da superfície S.

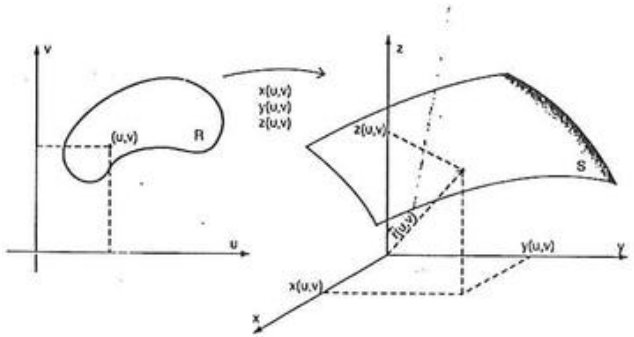


Figura 6.5

6.1.3 Exemplo

A equação vetorial

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + 1)\vec{k},$$

onde $-2 \le u \le 2$ e $0 \le v \le 5$, representa uma superfície parametrizada em $\mathbb{R}^3$.

Eliminando os parâmetros u e v das equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= u^2 + 1 \end{aligned}$$

obtemos a equação cartesiana $z = x^2 + 1$.

Como $x = u$ e $y = v$, a superfície está definida para

$$-2 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le 5.$$

A Figura 6.6 mostra a superfície S, que é chamada cilindro parabólico.

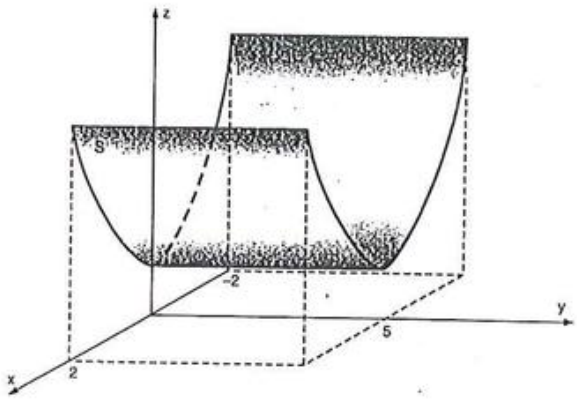


Figura 6.6

6.2 REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE ALGUMAS SUPERFÍCIES

6.2.1 Parametrização da Esfera

A Figura 6.7 mostra uma esfera de raio a, centrada na origem, onde marcamos um ponto $P(x, y, z)$ e dois ângulos u e v. O ângulo u é o mesmo que em coordenadas polares, e o ângulo v é formado pelos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OP_0}$.

Do triângulo retângulo P_0OP, temos que

$$\overline{OP_0} = a\cos v \quad \text{e} \quad z = a\operatorname{sen} v.$$

Do triângulo retângulo P_0OP_1, temos que

$$x = \overline{OP_0}\cos u \quad \text{e} \quad y = \overline{OP_0}\operatorname{sen} u.$$

Substituindo $\overline{OP_0}$, nas duas últimas equações, obtemos $x = a\cos v\cos u$ e $y = a\cos v\operatorname{sen} u$.

As equações

$$\begin{aligned} x &= a\cos v\cos u \\ y &= a\cos v\operatorname{sen} u \\ z &= a\operatorname{sen} v \end{aligned} \tag{1}$$

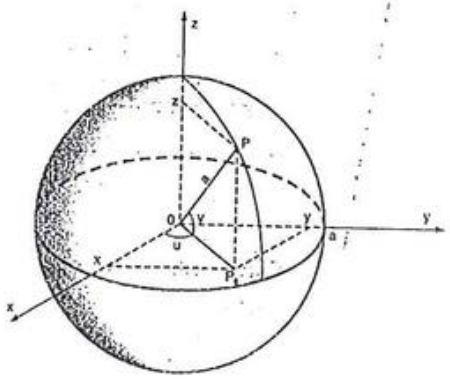


Figura 6.7

constituem uma parametrização da esfera.

A equação vetorial correspondente, é dada por

$$\vec{r}(u, v) = a\cos v\cos u\,\vec{i} + a\cos v\operatorname{sen} u\,\vec{j} + a\operatorname{sen} v\,\vec{k}. \tag{2}$$

Fazendo $0 \le u \le 2\pi$ e $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$, as equações (1) descrevem toda a esfera.

Para obtermos uma parametrização de uma parte da esfera, devemos determinar os correspondentes valores de u e v. Por exemplo, uma parametrização do hemisfério superior é dada pelas equações (1), onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

Observamos que a parametrização da esfera dada pelas equações (1) não é única.

Uma outra parametrização muito usada é dada por

$$\vec{r}(u, v) = (a\operatorname{sen} v\cos u,\ a\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u,\ a\cos v), \tag{3}$$

onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le \pi$.

Nesta parametrização, os parâmetros u e v coincidem com os ângulos θ e ϕ das coordenadas esféricas (ver Figura 6.8).

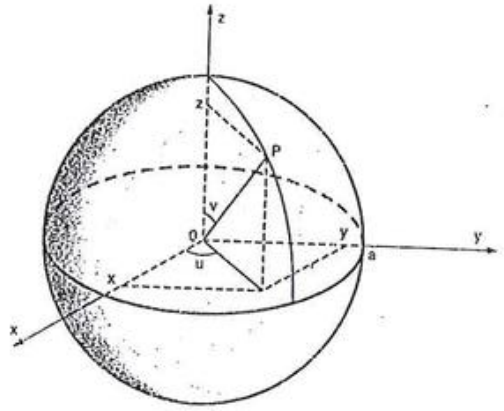


Figura 6.8

6.2.2 Exemplos

(i) Obter uma parametrização da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, que está no 1º octante.

Podemos usar a parametrização da esfera dada pela equação (2) e determinar os correspondentes valores dos parâmetros u e v.

Analisando geometricamente a Figura 6.9, podemos observar que ambos os parâmetros u e v variam de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$\vec{r}(u, v) = a\cos v \cos u\, \vec{i} + a\cos v \operatorname{sen} u\, \vec{j} + a\operatorname{sen} v\, \vec{k},$$

onde $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

(ii) Determinar uma parametrização da parte da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \text{ acima do plano } z = 2.$$

Vamos usar a parametrização da esfera dada pela equação (2) e determinar os valores de u e v de modo a obter os pontos da esfera que satisfazem $2 \leq z \leq 4$.

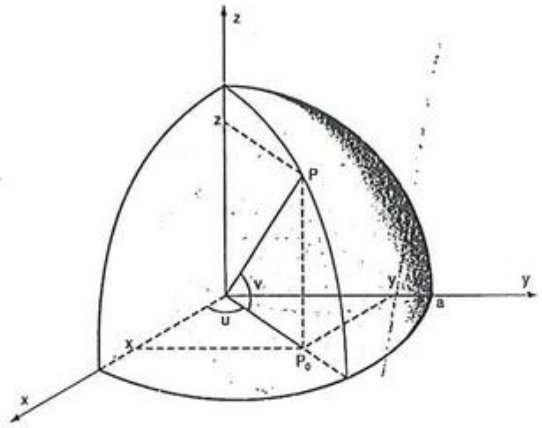


Figura 6.9

Como $z = 4\operatorname{sen} v$, temos $2 \leq 4\operatorname{sen} v \leq 4$ ou $\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} v \leq 1$.

Segue que $\frac{\pi}{6} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

Analisando a Figura 6.10, observamos que $0 \leq u \leq 2\pi$.

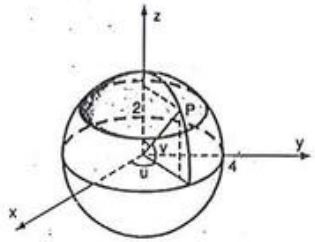


Figura 6.10

Portanto,

$$\vec{r}(u, v) = 4\cos v \cos u\, \vec{i} + 4\cos v \operatorname{sen} u\, \vec{j} + 4\operatorname{sen} v\, \vec{k},$$

onde $\frac{\pi}{6} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq u \leq 2\pi$.

(iii) Obter uma parametrização da esfera

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0.$$

Necessitamos completar os quadrados para encontrar o centro e o raio da esfera. Temos,

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 1 = 5 \text{ ou}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4.$$

Portanto, a esfera dada tem centro no ponto (1, 2, 0) e raio 2.

Sejam $\vec{r}_0 = \vec{i} + 2\vec{j}$ e

$$\vec{r}_1(u, v) = 2\cos u \cos v\, \vec{i} + 2\operatorname{sen} u \cos v\, \vec{j} + 2\operatorname{sen} v\, \vec{k},$$

$$0 \leq u \leq 2\pi \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Observando a Figura 6.11, vemos que o vetor posição de um ponto P da esfera, é dado por

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(u, v).$$

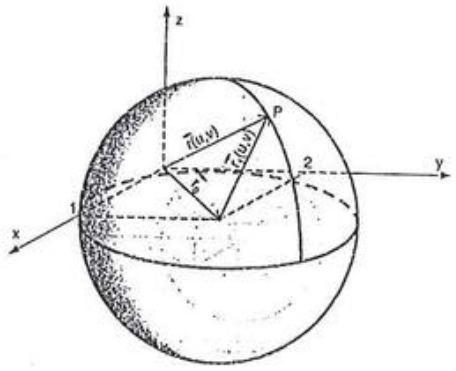


Figura 6.11

Portanto,

$$\vec{r}(u, v) = (1 + 2\cos u \cos v)\vec{i} + (2 + 2\operatorname{sen} u \cos v)\vec{j} + 2\operatorname{sen} v\,\vec{k},$$

onde $0 \le u \le 2\pi$ e $-\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2}$, é uma parametrização da esfera dada.

6.2.3 Parametrização de um Cilindro

Consideremos um cilindro vertical, dado pela equação $x^2 + y^2 = a^2$.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer sobre o cilindro. Devemos introduzir dois parâmetros u e v e obter as coordenadas de P como funções de u e v.

Na Figura 6.12, representamos o cilindro, onde visualizamos geometricamente os parâmetros u e v. O parâmetro u é o mesmo que em coordenadas polares e v coincide com z. Podemos observar que

$$x = a\cos u, \quad y = a\operatorname{sen} u \quad \text{e} \quad z = v.$$

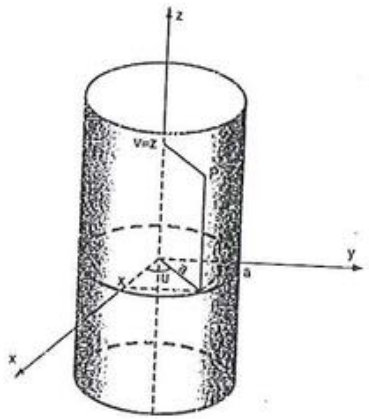


Figura 6.12

Portanto, uma parametrização do cilindro é dada por

$$\vec{r}(u, v) = a\cos u\,\vec{i} + a\operatorname{sen} u\,\vec{j} + v\vec{k}, \tag{4}$$

onde $0 \le u \le 2\pi$ e $-\infty < v < +\infty$.

6.2.4 Exemplos

(i) Obter uma parametrização da parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 5$, delimitada pelos semiplanos $y = x$ e $y = 2x$, com $x \ge 0$.

Vamos usar a equação (4) e determinar os correspondentes valores de u e v.

Como $z = v$, temos $0 \le v \le 5$. Para determinar os valores de u, precisamos dos ângulos u_1 e u_2 indicados na Figura 6.13.

Usando a equação do semiplano $x = y$, $x \ge 0$ e as equações paramétricas $x = 2\cos u$, $y = 2\operatorname{sen} u$, vem que

$$2\cos u_1 = 2\operatorname{sen} u_1$$

ou

$$\operatorname{tg} u_1 = 1.$$

Segue que $u_1 = \frac{\pi}{4}$.

De forma análoga, de $y = 2x$, $x \geq 0$, vem que

$$2 \operatorname{sen} u_2 = 4 \cos u_2$$

ou

$$\operatorname{tg} u_2 = 2.$$

Logo, $u_2 = \operatorname{arc\,tg}\, 2$.

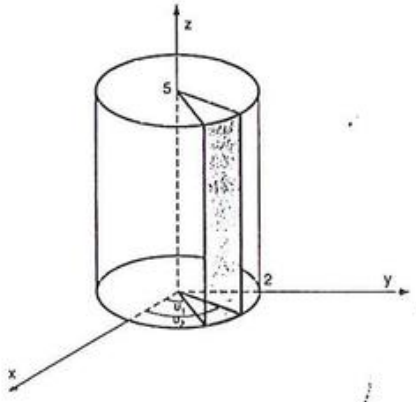


Figura 6.13

Portanto,

$$\vec{r}(u, v) = 2\cos u\, \vec{i} + 2\operatorname{sen} u\, \vec{j} + v\vec{k},$$

onde $0 \leq v \leq 5$ e $\frac{\pi}{4} \leq u \leq \operatorname{arc\,tg}\, 2$.

(ii) Obter uma parametrização do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$.

O cilindro dado é mostrado na Figura 6.14, onde introduzimos geometricamente os parâmetros u e v. Podemos observar que

$$x = a\cos u,\ y = v \text{ e } z = a\operatorname{sen} u.$$

Portanto,

$$\vec{r}(u, v) = a\cos u\, \vec{i} + v\vec{j} + a\operatorname{sen} u\vec{k},$$

$$0 \leq u \leq 2\pi \text{ e } -\infty < v < +\infty,$$

é uma parametrização do cilindro dado.

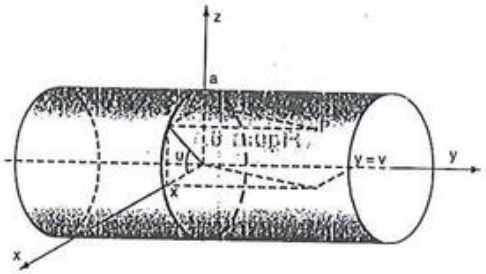


Figura 6.14

6.2.5 Parametrização de um Cone

A Figura 6.15 mostra um cone circular, onde denotamos por α o ângulo formado pelo eixo positivo dos z e uma geratriz do cone.

Dado um ponto qualquer $P(x, y, z)$ do cone, sejam u o ângulo polar e v a distância de P até a origem.

Do triângulo retângulo POP_2, temos $z = v\cos\alpha$ e $\overline{OP_0} = v\operatorname{sen}\alpha$.

Do triângulo retângulo P_0OP_1, vem $x = \overline{OP_0}\cos u$ e $y = \overline{OP_0}\operatorname{sen} u$.

Substituindo $\overline{OP_0}$ nas últimas equações, obtemos

$$x = v\operatorname{sen}\alpha\ \cos u \text{ e } y = v\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen} u.$$

Portanto, uma parametrização do cone da Figura 6.15 é dada por

$$\vec{r}(u, v) = v\operatorname{sen}\alpha\ \cos u\, \vec{i} + v\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen} u\, \vec{j} + v\cos\alpha\, \vec{k}. \qquad (5)$$

Fazendo $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq h$, a equação (5) descreve um cone de altura h cos α.

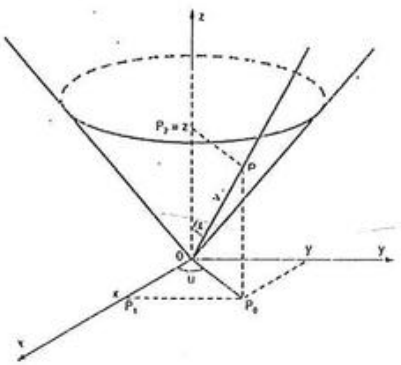


Figura 6.15

6.2.6 Exemplos

(i) Obter uma parametrização do cone gerado pela semi-reta $z = \sqrt{3}y$, $y \geq 0$ quando esta gira em torno do eixo positivo dos z.

Vamos determinar o ângulo α, formado pelo eixo positivo dos z e a geratriz do cone e usar a equação (5).

Seja $P(0, y, z)$ um ponto qualquer sobre a semi-reta dada. Observando a Figura 6.16(a), vemos que

$$y = \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad z = \overline{OP} \cos \alpha.$$

Como $z = \sqrt{3}\, y$, segue que $\cos \alpha = \sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha = 1/\sqrt{3}$. Portanto, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

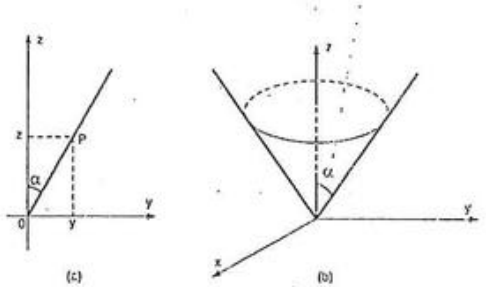


Figura 6.16

Logo,

$$\vec{r}(u, v) = \frac{1}{2} v \cos u\, \vec{i} + \frac{1}{2} v \operatorname{sen} u\, \vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} v\, \vec{k},$$

onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v < +\infty$.

(ii) Obter uma parametrização do cone $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

A Figura 6.17 mostra o cone dado, que está representado na forma explícita.

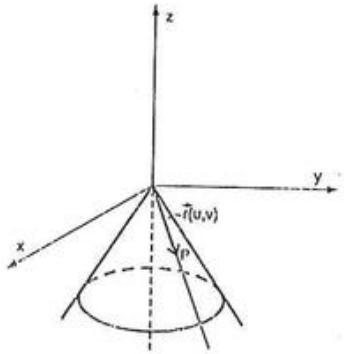


Figura 6.17

Podemos parametrizá-lo, fazendo

$$x = u$$

$$y = v$$

$$z = -\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Neste caso, sua equação vetorial é dada por

$$\vec{r}(u, v) = u\, \vec{i} + v\, \vec{j} - \sqrt{u^2 + v^2}\, \vec{k},$$

onde $-\infty < u < +\infty$ e $-\infty < v < +\infty$.

6.2.7 Parametrização de um Paraboloide

A Figura 6.18 mostra um paraboloide $z = a^2(x^2 + y^2)$. Este paraboloide pode ser parametrizado fazendo-se

$$x = u,\ y = v \ \text{ e } \ z = a^2(u^2 + v^2).$$

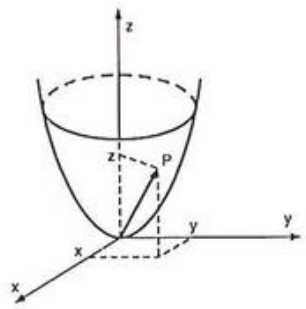


Figura 6.18

Neste caso, a equação vetorial será dada por

$$\vec{r}(u,\ v) = u\vec{i} + v\vec{j} + a^2(u^2 + v^2)\vec{k}, \tag{6}$$

onde u e v podem assumir quaisquer valores reais.

Observamos que, muitas vezes, as próprias variáveis x e y são usadas como parâmetros. Neste caso, a equação (6) é reescrita como

$$\vec{r}(x,\ y) = x\vec{i} + y\vec{j} + a^2(x^2 + y^2)\vec{k}. \tag{7}$$

Uma outra parametrização do paraboloide $z = a^2(x^2 + y^2)$ é dada por

$$\vec{r}(u,\ v) = (u\cos v,\ u\operatorname{sen} v,\ a^2u^2), \tag{8}$$

onde $0 \le v \le 2\pi$ e $0 \le u < +\infty$.

Nesta parametrização, os parâmetros u e v coincidem com as coordenadas r e θ das coordenadas polares (ver Figura 6.19).

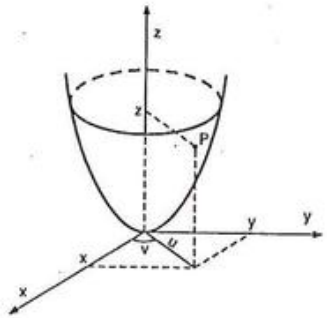


Figura 6.19

6.2.8 Exemplo

Obter uma parametrização da parte do paraboloide $z = 2(x^2 + y^2)$ abaixo do plano $z = 8$.

Usando x e y como parâmetros, uma equação vetorial do paraboloide é dada por

$$\vec{r}(x,\ y) = (x,\ y,\ 2(x^2 + y^2)).$$

Como queremos a parte do paraboloide abaixo do plano $z = 8$, os parâmetros x e y devem satisfazer

$$2(x^2 + y^2) \le 8$$

ou

$$x^2 + y^2 \le 4.$$

Podemos observar que, neste exemplo, a região $R = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$ é a projeção da superfície S sobre o plano xy (ver Figura 6.20).

6.2.9 Parametrização de Outras Superfícies

De maneira geral, dada uma superfície S, sempre procuramos parametrizá-la da forma mais natural possível.

Por exemplo, quando S for o gráfico de uma função $z = z(x, y)$, definida em uma região R do plano xy, as variáveis x e y sempre podem ser tomadas como parâmetros. Uma parametrização de S será dada por

$$\vec{r}(x,\ y) = (x,\ y,\ z(x,\ y)),$$

onde $(x, y) \in R$ (ver Figura 6.21).

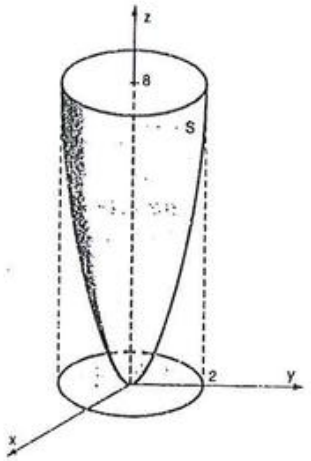


Figura 6.20

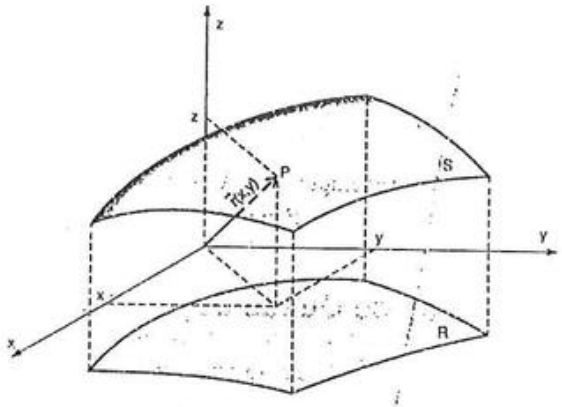


Figura 6.21

A região R é a projeção de S sobre o plano xy.

6.2.10 Exemplos

(i) Parametrizar o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

A Figura 6.22 mostra a superfície S, que é o gráfico da função $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ definida para $x^2 + y^2 \leq 4$.

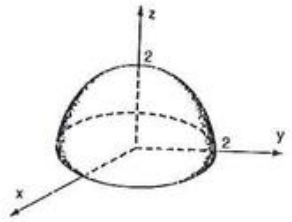


Figura 6.22

Uma parametrização de S é dada por

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\vec{k},\ (x, y) \in R,$$

onde R é o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

(ii) Parametrizar a superfície S dada por $y = x^2 + z^2$, $y \leq 4$.

– A Figura 6.23 mostra a superfície S. Neste caso, S é o gráfico de uma função $y = y(x, z)$, definida em uma região R' do plano xz.

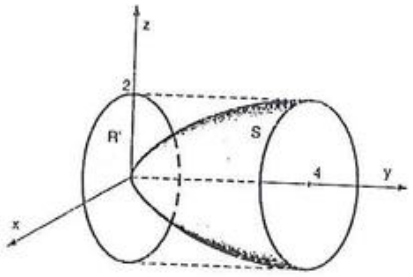


Figura 6.23

Tomando x e z como parâmetros, obtemos uma parametrização de S, dada por

$$\vec{r}(x, z) = x\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + z\vec{k},$$

onde x e z satisfazem $x^2 + z^2 \leq 4$.

Observamos que, neste exemplo, a região R' é a projeção de S sobre o plano xz.

(iii) Obter uma parametrização da parte do cone $x^2 = y^2 + z^2$ que está entre os planos $x = 1$ e $x = 4$.

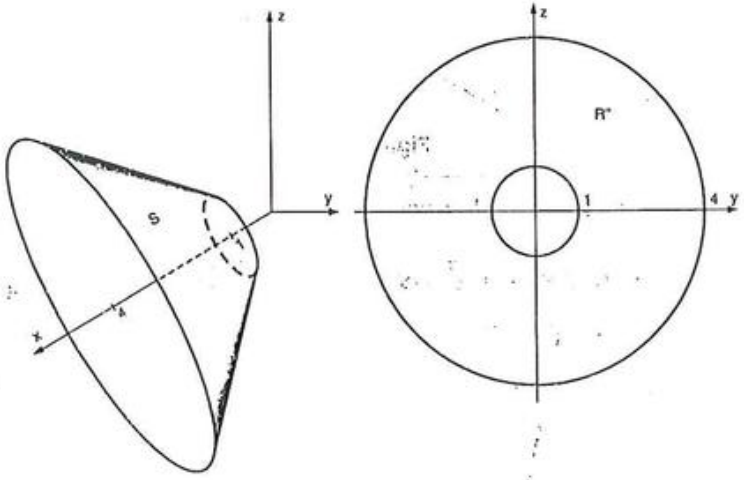


Figura 6.24

A Figura 6.24 mostra a superfície S e a sua projeção R'' sobre o plano yz.

Podemos observar que S é o gráfico da função

$$x = \sqrt{y^2 + z^2}, \ (y, z) \in R''.$$

Tomando y e z como parâmetros, obtemos uma parametrização de S, dada por

$$\vec{r}(y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}\,\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

onde $(y, z) \in R''$.

A região R'' é o anel circular delimitado pelas circunferências $y^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 16$.

6.3 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 7 a equação dada é uma representação implícita de uma superfície S.

a) Identificar a superfície.

b) Escrever algumas representações explícitas de partes de S, representando-as graficamente.

1. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 24$
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
3. $x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 = 11$
4. $2x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + 3 = 0$
5. $2x + \sqrt{2}\,y - z = 10$
6. $z - x^2 = 0$
7. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Nos exercícios de 8 a 14, obter uma equação cartesiana para a superfície dada. Representá-la graficamente.

8. $\vec{r}(u, v) = (u^2 + v^2 - 1)\vec{i} + u\vec{j} + v\vec{k}$
9. $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + 2\sqrt{u^2 + v^2}\,\vec{k}$
10. $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + u^2\vec{j} + v\vec{k}, \ -2 \leq u \leq 2, \ 0 \leq v \leq 4$
11. $\vec{r}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2}\right)$
12. $\vec{r}(u, v) = \left(u, \sqrt{4 - u^2 - v^2}, v\right)$
13. $\vec{r}(u, v) = \left(\sqrt{4 - u^2 - v^2}, u, v\right)$
14. $\vec{r}(u, v) = (2\cos u, 3\operatorname{sen} u, v), \ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq v \leq 4$

Nos exercícios de 15 a 20 parametrizar as seguintes superfícies, dadas implicitamente:

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 4$

16. $x^2 + y^2 - z = 1$

17. $x + y + z = 8$

18. $x^2 + z^2 = 4, \quad -\infty < y < \infty$

19. $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 + 1 = 0$

20. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$

Nos exercícios de 21 a 45 escrever uma representação paramétrica para a superfície dada.

21. Esfera centrada na origem e raio $\sqrt{2}$

22. Esfera centrada em (2, –1, 3) e raio 4

23. Parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ que está no 2º octante

24. Parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ acima do plano $z = \frac{1}{2}$

25. $x^2 + y^2 = 3$

26. Parte do cilindro $x^2 + y^2 = 16$, $-2 \le z \le 2$ delimitado por $x = y$, $y \ge 0$ e $x = \frac{y}{2}$

27. $x^2 + z^2 = 10$

28. Cone gerado pela semi-reta $z = 2y$, $y \ge 0$ quando esta gira em torno do eixo positivo dos z

29. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

30. $z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$

31. $2x^2 + 2y^2 - 3z = 0$

32. $4z - 3x^2 - 3y^2 = 0$

33. $2x^2 + 2z^2 - y = 0, \quad y \le 8$

34. $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, \quad z \ge 0$

35. Parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, que está acima do plano $z = 2$

36. Parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, tal que $x \ge 0$ e $y \le 0$

37. Parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está entre os semi-planos $y = x$ e $y = 2x$, $x \ge 0$

38. Cilindro $y^2 + z^2 = 9, \quad 0 \le x \le 4$

39. Cilindro $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 3$

40. Cone gerado pela semi-reta $y = \sqrt{3}x$, $x \ge 0$, quando esta gira em torno do eixo positivo dos y

41. Parte do cone $y = 1 - \sqrt{x^2 + z^2}$ tal que $y \ge -3$

42. Parte do paraboloide $z = x^2 + y^2 - 1$, que está entre os planos $z = 0$ e $z = 3$

43. Parte do plano $x + y + z = 4$ que está no 1º octante

44. Parte do plano $2x + 3y = 9$ delimitada pelos planos coordenados $x = 0$ e $y = 0$

45. Parte do plano $y + z = 8$, delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

6.4 CURVAS COORDENADAS

Seja S uma superfície paramétrica representada por

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in R. \tag{1}$$

Se fixamos o parâmetro v, a equação (1) descreve uma curva. Tal curva está contida em S e é chamada u – curva.

Analogamente, fixando o parâmetro u, obtemos uma v – curva sobre S.

Dado um ponto P sobre S, de vetor posição $\vec{r}(u_0, v_0)$, a u – curva $\vec{r}(u, v_0)$ e a v – curva $\vec{r}(u_0, v)$ são chamadas *curvas coordenadas* de S em P.

A Figura 6.25 mostra as curvas coordenadas em um ponto P de uma superfície S. Salientamos que a u – curva é a imagem de um segmento horizontal $v = v_0$ contido em R e a v – curva é a imagem de um segmento vertical $u = u_0$.

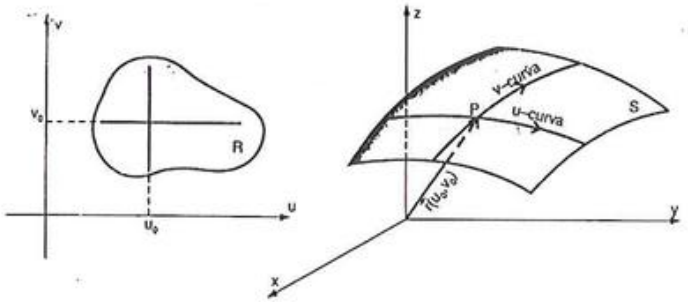


Figura 6.25

Observamos que uma curva coordenada pode degenerar-se em um ponto.

6.4.1 Exemplo

Determinar as curvas coordenadas da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, no ponto $P(2, 0, 0)$.

Usando a parametrização da esfera vista em 6.2.1(2), vem

$\vec{r}(u, v) = (2\cos u \cos v, 2 \operatorname{sen} u \cos v, 2\operatorname{sen} v)$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

No ponto $P(2, 0, 0)$, temos $u = 0$ e $v = 0$.

Portanto, a u – curva em P tem equação

$$\vec{r}(u, 0) = (2\cos u, 2\operatorname{sen} u, 0),\ 0 \leq u \leq 2\pi.$$

A v – curva em P é dada por

$$\vec{r}(0, v) = (2\cos v, 0, 2\operatorname{sen} v),\quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

A Figura 6.26 ilustra este exemplo.

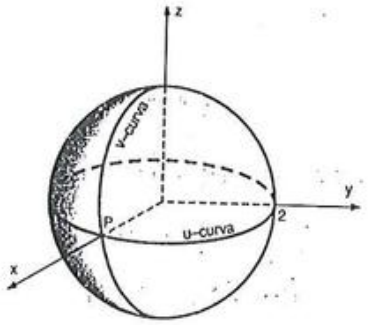


Figura 6.26

6.5 PLANO TANGENTE E RETA NORMAL

Seja P um ponto de uma superfície paramétrica S, representada por

$$\vec{r}(u, v),\ (u, v) \in R.$$

Suponhamos que P tem vetor posição $\vec{r}(u_0, v_0)$ e que as curvas coordenadas de S em P sejam suaves. Então, conforme vimos em 3.10.3, no ponto P, o vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{d(\vec{r}(u, v_0))}{du}$ é tangente a u – curva $\vec{r}(u, v_0)$ e o vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{d(\vec{r}(u_0, v))}{dv}$ é tangente a v – curva $\vec{r}(u_0, v)$ (ver Figura 6.27).

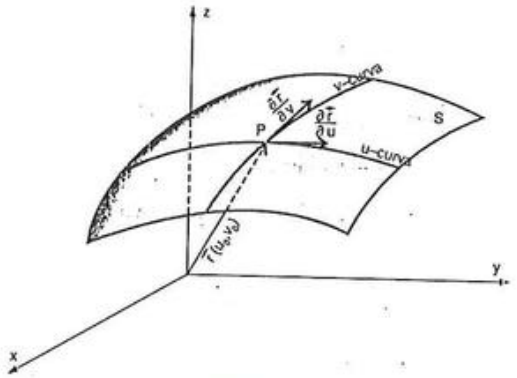


Figura 6.27

Se os vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ são linearmente independentes, eles determinam um plano. Este plano é chamado plano tangente à superfície no ponto P.

O vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ é perpendicular ao plano tangente e é denominado vetor normal à superfície S (ver Figura 6.28).

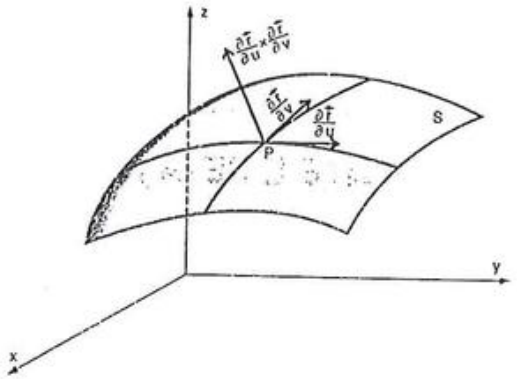


Figura 6.28

6.5.1 Exemplo

Uma superfície S é descrita pela equação

$$\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, u^2 - 1),$$

onde $0 \leq u \leq 4$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

a) Representar graficamente a superfície S.

b) Dar a equação e desenhar a v – curva correspondente a $u = 2$ e a u – curva correspondente a $v = \frac{\pi}{4}$, sobre a superfície S.

c) Determinar os vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ para $u = 2$ e $v = \frac{\pi}{4}$ e representá-los no ponto correspondente sobre o gráfico de S.

Solução de (a). Para representar graficamente a superfície S, vamos encontrar sua equação cartesiana. Eliminando os parâmetros u e v das equações paramétricas

$$x = u\cos v$$

$$y = u\operatorname{sen} v$$

$$z = u^2 - 1,$$

obtemos $z = x^2 + y^2 - 1$, sendo que z está definida na região $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$.

A Figura 6.29 mostra a superfície S, que é um parabolóide.

Solução de (b). Fazendo $u = 2$ na equação da superfície S, obtemos a v – curva

$$\vec{r}(2, v) = (2\cos v, 2\operatorname{sen} v, 3), \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

que é uma circunferência no plano $z = 3$.

Fazendo $v = \frac{\pi}{4}$, obtemos a u – curva

$$\vec{r}\left(u, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}u, \frac{\sqrt{2}}{2}u, u^2 - 1\right), \quad 0 \leq u \leq 4,$$

que é um arco de parábola no plano $x = y$.

A u – curva e a v – curva obtidas estão representadas na Figura 6.29.

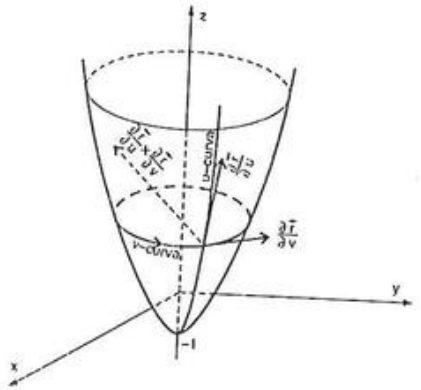


Figura 6.29

Solução de (c). Temos,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (\cos v,\ \text{sen}\, v,\ 2u);$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-u\text{sen}\, v,\ u\cos v,\ 0);$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \text{sen}\, v & 2u \\ -u\text{sen}\, v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2u^2\cos v\,\vec{i} - 2u^2\text{sen}\, v\,\vec{j} + u\vec{k}.$$

Para $u = 2$ e $v = \dfrac{\pi}{4}$, vem

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 4\right);$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(-4\sqrt{2},\ -4\sqrt{2},\ 2\right).$$

Os vetores encontrados estão representados na Figura 6.29, com origem no ponto $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3\right)$, que é o ponto de S correspondente aos valores dados de u e v. Podemos observar que:

(i) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ são linearmente independentes e portanto, determinam o plano tangente a S, no ponto P.

(ii) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ é normal à superfície S.

6.5.2 Equação da Reta Normal

Conforme vimos em 2.4.1, uma equação vetorial de uma reta é dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t,$$

onde o vetor $\vec{a}$ é o vetor posição de um ponto da reta e o vetor $\vec{b}$ nos dá a direção da reta.

Queremos a equação da reta normal à superfície S em um ponto P de S. Se $\vec{r}(u_0,\ v_0)$ é o vetor posição do ponto P, podemos tomar

$$\vec{a} = \vec{r}(u_0,\ v_0)$$

e $\vec{b} = \left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)(u_0,\ v_0)$ (ver Figura 6.30).

Uma equação da reta normal n, é dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u_0,\ v_0) + t\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)(u_0,\ v_0). \qquad (1)$$

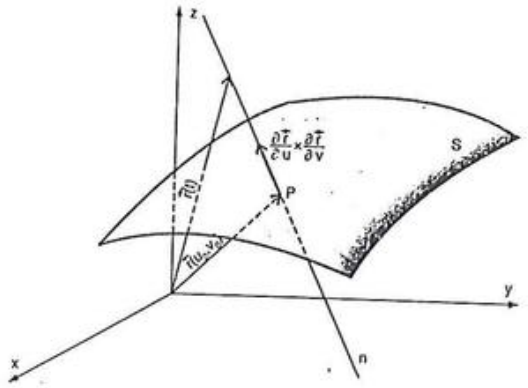


Figura 6.30

6.5.3 Exemplo

Determinar a equação da reta normal à superfície S do Exemplo 6.5.1, no ponto $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3\right)$.

O vetor posição do ponto P é

$$\vec{r}\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3).$$

No Exemplo 6.5.1, calculamos o vetor

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = (-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 2).$$

Portanto, uma equação da reta normal é dada por

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3) + t(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 2)$$

$$= (\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,t, \sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,t, 3 + 2t).$$

A Figura 6.31 ilustra este exemplo.

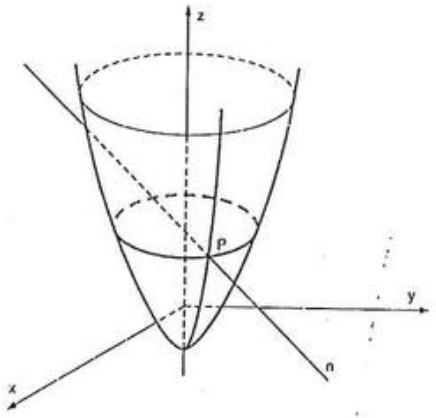


Figura 6.31

6.5.4 Equação do Plano Tangente

Queremos determinar a equação do plano tangente à superfície S, no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$.

Seja $Q(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano tangente. Analisando a Figura 6.32, vemos que a equação do plano tangente é dada por

$$\vec{q} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)(u_0, v_0) = 0 \qquad (2)$$

onde $\vec{q} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

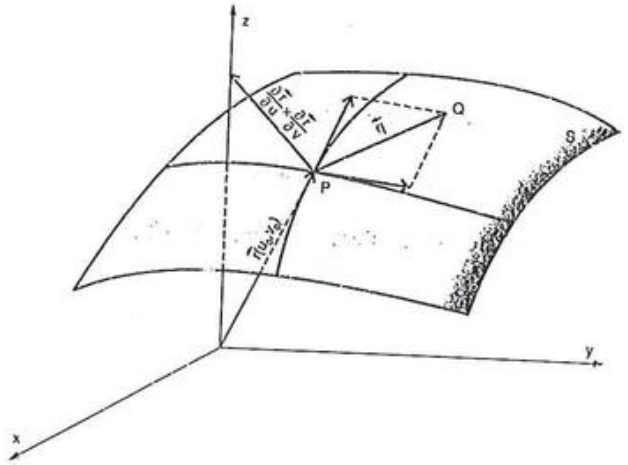


Figura 6.32

6.5.5 Exemplos

(i) Determinar a equação do plano tangente à superfície S do Exemplo 6.5.1, no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$.

Do Exemplo 6.5.1, temos que

$$(u_0, v_0) = \left(2, \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\vec{r}(u_0, v_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3);$$

e

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = (-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 2).$$

Portanto, a equação do plano tangente a S em P é dada por

$$\left(x - \sqrt{2},\ y - \sqrt{2},\ z - 3\right) \cdot \left(-4\sqrt{2},\ -4\sqrt{2},\ 2\right) = 0 \text{ ou}$$

$$-4\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) - 4\sqrt{2}\left(y - \sqrt{2}\right) + 2(z - 3) = 0$$

ou ainda, $2\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y - z = 5$.

(ii) Determinar a equação do plano tangente à superfície S dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ no ponto } P\left(1,\ 1,\ \sqrt{2}\right).$$

Utilizando a equação vetorial da esfera, dada em 6.2.1 (2), temos

$$\vec{r}(u,\ v) = (2\cos u\ \cos v,\ 2\operatorname{sen} u\ \cos v,\ 2\operatorname{sen} v),$$

onde $0 \le u \le 2\pi$ e $-\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2}$ e

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(4\cos u\ \cos^2 v,\ 4\operatorname{sen} u\ \cos^2 v,\ 4\cos v\ \operatorname{sen} v\right).$$

Os valores de u e v correspondentes ao ponto $P\left(1,\ 1,\ \sqrt{2}\right)$ são $u = \dfrac{\pi}{4}$ e $v = \dfrac{\pi}{4}$, respectivamente.

Temos então,

$$(u_0,\ v_0) = \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\vec{r}(u_0,\ v_0) = \left(1,\ 1,\ \sqrt{2}\right)$$

e

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,\ v_0) = \left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\right).$$

Portanto, a equação do plano tangente a S em P, é dada por

$$\left(x - 1,\ y - 1,\ z - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\right) = 0$$

ou

$$(x - 1)\sqrt{2} + (y - 1)\sqrt{2} + \left(z - \sqrt{2}\right).2 = 0$$

ou ainda, $x + y + \sqrt{2}\ z = 4$.

Na Figura 6.33, representamos a superfície S, o plano tangente a S em P e o vetor $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ no ponto P.

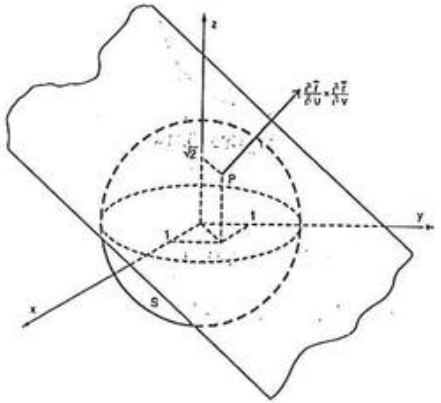


Figura 6.33

(iii) Determinar a equação do plano tangente à superfície S do exemplo anterior, no ponto $P_0(0, 0, 2)$.

Este exemplo não pode ser resolvido, utilizando a equação vetorial

$$\vec{r}(u, v) = (2\cos u\ \cos v,\ 2\operatorname{sen} u\ \cos v,\ 2\operatorname{sen} v)$$

pois, no ponto $P_0(0, 0, 2)$, o vetor $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ se anula.

No entanto, podemos resolvê-lo com o auxílio do gradiente, como segue.

A esfera dada é uma superfície de nível S, da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e passa no ponto $P_0(0, 0, 2)$.

Logo, conforme Figura 6.34, a equação do plano tangente a S em P_0, é dada por

$$\nabla f(P_0) \cdot [\vec{r} - \vec{r}_0] = 0, \text{ onde}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ e } \vec{r}_0 = 2\vec{k}.$$

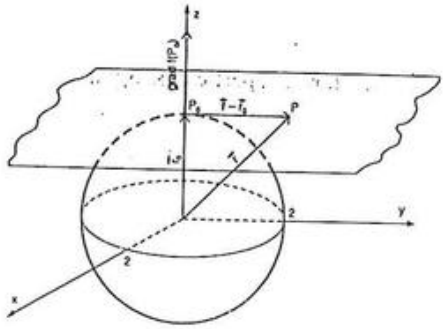


Figura 6.34

Temos,

$$\text{grad } f(P_0) = (0, 0, 4) \quad \text{e}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - 0,\ y - 0,\ z - 2).$$

Portanto, a equação do plano tangente a S em P, é dada por

$$(0, 0, 4) \cdot (x, y, z - 2) = 0 \text{ ou}$$

$$z = 2.$$

6.6 SUPERFÍCIES SUAVES E ORIENTAÇÃO

Na seção 2.5 vimos que uma curva suave não possui pontos angulosos. Analogamente, uma superfície suave ou regular é caracterizada pela ausência de arestas.

Podemos dizer que em cada ponto P de uma superfície suave S existe um único plano tangente a S em P.

As equações paramétricas podem ajudar na formalização da idéia de suavidade de uma superfície. Uma maneira conveniente de descrever a noção de suavidade de uma superfície S é dizer que S pode ser dividida em partes e cada uma destas partes admite uma parametrização $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, onde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = (u, v)$ admitem derivadas contínuas de todas as ordens e que, para todo $(u_0, v_0) \in R$, as derivadas primeiras satisfazem a condição

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \text{ são linearmente independentes.} \qquad (1)$$

A condição (1) é conhecida como *condição de suavidade* ou *regularidade*.

Os pontos de S onde falha a condição de suavidade para qualquer parametrização são chamados *pontos singulares*.

Observamos que uma má escolha de parametrização pode nos levar a pontos onde a condição de suavidade não é verificada, mesmo que a superfície seja suave. Estes pontos são chamados *pontos singulares falsos*.

6.6.1 Exemplo

O ponto $P(0, 0, 2)$ da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é um ponto singular da parametrização

$$\vec{r}(u, v) = (2\cos u \cos v,\ 2\text{sen } u \cos v,\ 2\text{sen } v), \qquad (2)$$

já que no ponto $P(0, 0, 2)$ temos que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{0}$, e então $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ não são linearmente independentes em P. Logo, no ponto $P(0, 0, 2)$ falha a condição de suavidade para a parametrização (2).

No entanto $P(0, 0, 2)$ é uma singularidade falsa pois S é uma superfície suave. De fato, usando a parametrização

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{4 - u^2 - v^2}\,\vec{k} \qquad (3)$$

obtemos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(P) = (1, 0, 0)$$

e

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(P) = (0, 1, 0).$$

Como $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(P)$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(P)$ são linearmente independentes, para a parametrização (3) a condição de suavidade é satisfeita.

6.6.2 Superfícies Suaves por Partes

Dizemos que uma superfície S é suave por partes se S pode ser dividida em um número finito de partes suaves.

6.6.3 Exemplos

(i) Planos, parabolóides, cilindros e esferas são superfícies suaves.

(ii) O cone não é uma superfície suave.

(iii) A superfície de um cubo é uma superfície suave por partes, pois pode ser dividida em 6 partes suaves. Cada parte corresponde a uma face do cubo.

(iv) A Figura 6.35(a) mostra esboços de superfícies suaves e a Figura 6.35(b) mostra algumas superfícies suaves por partes.

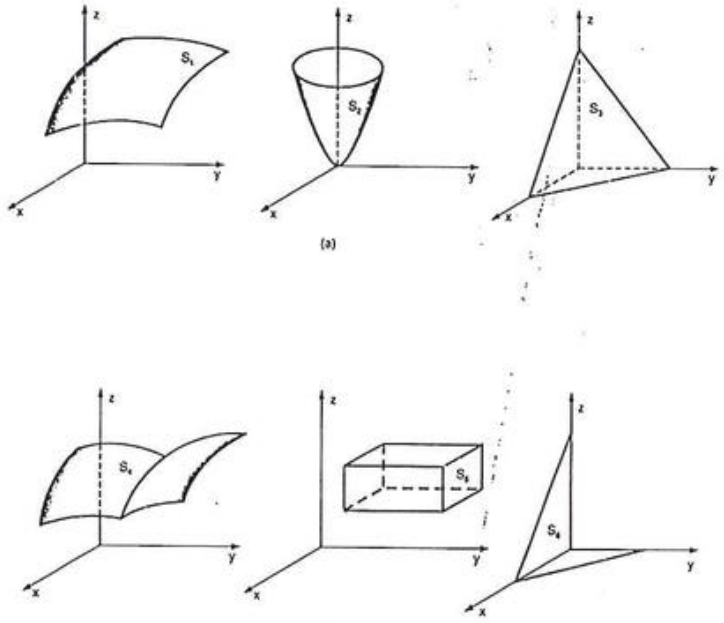


Figura 6.35

6.6.4 Orientação de uma Superfície

Dada uma superfície suave S, em cada ponto $P \in S$, temos dois vetores unitários normais a S (ver Figura 6.36). Se for possível escolher um desses vetores de maneira contínua em toda a superfície, dizemos que S é *orientável*.

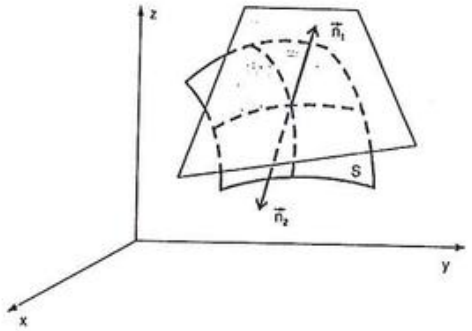


Figura 6.36

Uma superfície S *está orientada* quando escolhemos em cada ponto $P \in S$ um vetor unitário $\vec{n}(P)$, normal a S, que varia continuamente com P. O campo de vetores $\vec{n}$ é chamado um campo normal unitário.

Observamos que se S é representada por $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$, nos pontos onde a condição de suavidade é satisfeita, os vetores

$$\vec{n}_1 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} \quad \text{e} \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$$

são vetores unitários normais a S.

6.6.5 Exemplos

(i) Determinar um campo normal unitário da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, representando graficamente o vetor normal unitário encontrado em alguns pontos da esfera.

Solução. Vamos usar a representação paramétrica da esfera dada por

$$\vec{r}(u, v) = (a\cos u \ \cos v, \ a\text{sen } u \ \cos v, \ a\text{sen } v)$$

$0 \leq u \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, e determinar o vetor

$$\vec{n}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}.$$

Temos,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (a^2\cos u \ \cos^2 v, \ a^2\text{sen } u \ \cos^2 v, \ a^2\text{sen } v \ \cos v)$$

e

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = a^2\cos v, \text{ sendo que}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0 \text{ nos pontos onde } v = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Portanto, para $v \neq \pm\frac{\pi}{2}$, um vetor normal unitário é dado por

$$\vec{n}_1 = (\cos u \ \cos v, \ \text{sen } u \ \cos v, \ \text{sen } v).$$

Nos pontos onde $v = \pm\frac{\pi}{2}$, podemos obter um vetor normal unitário tomando o limite, como segue:

Para $v = \frac{\pi}{2}$, temos

$$\lim_{v \to \frac{\pi}{2}} (\cos u \ \cos v, \ \text{sen } u \ \cos v, \ \text{sen } v) = (0, 0, 1)$$

e para $v = -\frac{\pi}{2}$, temos

$$\lim_{v \to -\frac{\pi}{2}} (\cos u \ \cos v, \ \text{sen } u \ \cos v, \ \text{sen } v) = (0, 0, -1).$$

O campo $\vec{n}_1$ definido por

$$\vec{n}_1 = \begin{cases} (\cos u \ \cos v, \ \text{sen } u \ \cos v, \ \text{sen } v), \text{ para } v \neq \pm\frac{\pi}{2} \\ (0, \ 0, \ 1), \text{ para } v = \frac{\pi}{2} \\ (0, \ 0, \ -1), \text{ para } v = -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

é um campo normal unitário da esfera dada.

Na Figura 6.37, representamos o vetor $\vec{n}_1$ em alguns pontos da esfera. Observamos que ele aponta para fora e que varia continuamente ao deslocar-se sobre a esfera.

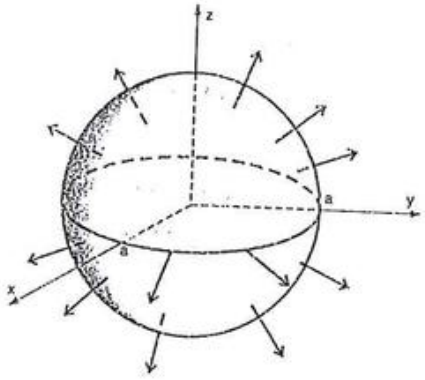


Figura 6.37

(ii) Determinar um campo normal unitário do parabolóide S, dado por

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \text{ onde } x^2 + y^2 \leq 4.$$

Solução. Um vetor normal unitário do parabolóide é dado por

$$\vec{n}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right|}$$

$$= \left(\frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right).$$

O campo normal unitário definido por $\vec{n}_1$ está representado na Figura 6.38. Podemos observar que o vetor $\vec{n}_1$ aponta para o interior do parabolóide.

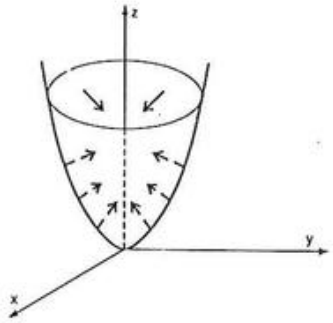


Figura 6.38

Freqüentemente, uma superfície orientável é denominada superfície bilateral. As superfícies que usualmente encontramos no Cálculo, são todas bilaterais. No entanto, existem superfícies unilaterais como mostra o exemplo a seguir.

6.6.6 Exemplo

A Figura 6.39, mostra a fita de Möbius, que é um exemplo clássico de superfície unilateral. Ela pode ser obtida a partir de um longo retângulo $ABCD$, onde os lados AC e BD são unidos de tal forma que A coincida com D e B com C.

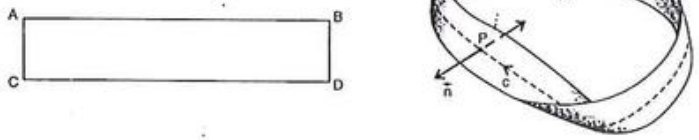


Figura 6.39

Podemos observar que, dado um ponto P da fita de Möbius, podemos escolher um vetor normal unitário $\vec{n}$. No entanto, quando $\vec{n}$ se desloca continuamente sobre a curva C e retorna a P, seu sentido se inverte.

6.6.7 Orientação de uma Superfície Suave por Partes

Se uma superfície suave e orientada S é limitada por uma curva fechada simples C, podemos associar à orientação de S, um sentido positivo sobre C, conforme ilustra a Figura 6.40.

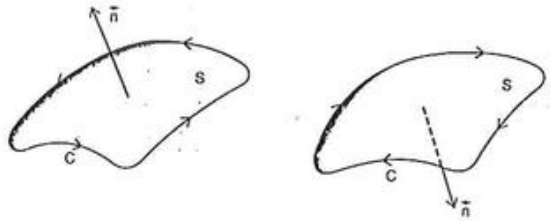


Figura 6.40

Usando esta convenção, podemos orientar uma superfície suave por partes. Vamos exemplificar, supondo que S é formada por duas partes suaves, orientáveis, S_1 e S_2 conforme Figura 6.41. Se C é o contorno comum de S_1 e S_2, escolhemos um vetor normal unitário de S_1 e S_2 de tal maneira que o sentido positivo de C em relação a S_1 é o sentido oposto do sentido positivo de C com relação a S_2.

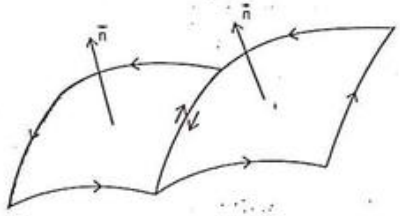


Figura 6.41

Se a superfície S é formada por mais de duas partes suaves, procedemos de forma análoga.

6.6.8 Exemplo

A Figura 6.42 mostra uma possível orientação da superfície S de um cubo. Com esta orientação, S é denominada superfície exterior do cubo dado.

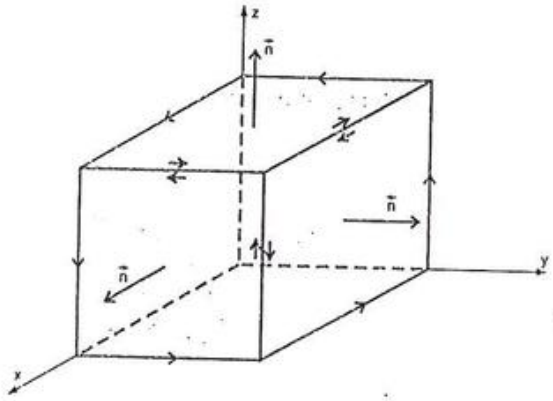


Figura 6.42

6.7 EXERCÍCIOS

1. Determinar as curvas coordenadas das superfícies dadas, nos pontos indicados:

   a) Esfera $\vec{r}(u, v) = (\cos u \cos v,\ \text{sen}\, u \cos v,\ \text{sen}\, v)$

   $0 \le u \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$ no ponto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   b) Parabolóide $\vec{r}(u, v) = (u \cos v,\ u\text{sen}\, v,\ u^2)$
   $0 \le v \le 2\pi,\ 0 \le u \le 2$; $P(1, 1, 2)$.

   c) Parabolóide $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$; $P(1, 1, 2)$.

   d) Hemisfério $\vec{r}(u, v) = \left(u,\ v,\ \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$; $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Parametrizar as seguintes superfícies, determinando as curvas coordenadas, nos pontos indicados:

   a) Plano $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$; $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

   b) Cilindro $x^2 + y^2 = 9$; $P(3, 0, 4)$

   c) Cone $x^2 + z^2 - y^2 = 0$; $y \ge 0$; $P\left(2, \sqrt{13}, 3\right)$.

3. Seja S uma superfície descrita pela equação

   $\vec{r}(u, v) = (u\cos v, 2u^2, u\text{sen}\, v)$ onde $0 \le u \le 2$ e $0 \le v \le 2\pi$.

   a) Representar graficamente a superfície S.

   b) Encontrar as curvas coordenadas no ponto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e representá-las graficamente.

   c) Determinar os vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(P)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(P)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(P) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(P)$ e representá-los graficamente.

4. Dada a superfície parametrizada

   S: $\vec{r}(u, v) = (2\cos u \cos v, 2\text{sen}\, u \cos v, 2\text{sen}\, v)$, onde $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$:

   a) Representar S graficamente.

   b) Esboçar a u–curva correspondente a $v = \frac{\pi}{3}$ e a v–curva correspondente a $u = \frac{\pi}{4}$.

   c) Determinar os vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ para $u = \frac{\pi}{4}$ e $v = \frac{\pi}{3}$, representando-os no ponto correspondente sobre o gráfico de S.

   d) Determinar as equações da reta normal e do plano tangente à superfície S, no ponto onde $u = \frac{\pi}{4}$ e $v = \frac{\pi}{3}$.

5. Determinar uma equação vetorial da reta normal às seguintes superfícies nos pontos indicados.

   a) $\vec{r}(u, v) = (u^2 + v^2 - 1, u, v)$; $P(4, 1, 2)$

   b) $\vec{r}(u, v) = (u^2 - 1, u\cos v, u\text{sen}\, v)$; $P(4, 1, 2)$

c) $\vec{r}(u, v) = (u^2 - 1, u, v)$; $P(3, 2, 4)$

d) $\vec{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$; $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

e) $\vec{r}(u, v) = (u, v, -u^2 - v^2)$; $P(1, 1, -2)$

f) $\vec{r}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2}\right)$; $P\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$

g) $\vec{r}(u, v) = \left(u, v, \frac{5v + 2u - 10}{3}\right)$; $P\left(1, 2, \frac{2}{3}\right)$.

6. Escrever uma equação vetorial para a superfície dada e determinar as equações do plano tangente e da reta normal, nos pontos indicados:

a) $z = 3x^2y$; $P_0(1, 1, 3)$; $P_1(-1, 1, 3)$

b) $z = x^2 + y^2$; $P_0(0, 1, 1)$; $P_1(-1, -1, 2)$

c) $z = xy$; $P_0\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $P_1\left(0, \sqrt{2}, 0\right)$

d) $x + 2y + z = 4$; $P_0\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$; $P_1(0, 1, 2)$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $P_0(3, 0, 0)$; $P_1(0, 3, 0)$; $P_2(0, 0, 3)$; $P_3(1, 2, 2)$

f) $x^2 + y^2 = 4$; $P_0\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)$; $P_1(0, 2, 2)$.

7. Determinar a equação do plano tangente à superfície S dada, no ponto indicado:

a) $\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, -2u^2)$; $P(1, 1, -4)$

b) $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \left(u^2 + 2v^2\right)\vec{k}$; $P(0, 1, 2)$.

8. Encontrar a equação de uma reta que passa na origem e é normal à superfície $x + 2y + z = 4$.

9. Determinar um campo normal unitário do parabolóide

$$\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, u^2 - 1),$$

representando-o graficamente sobre a superfície.

BIBLIOTECA
UNED-PONTA GROSSA
CEFET-PR

Snow666

10. Determinar um campo normal unitário do plano que passa nos pontos (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1), usando as seguintes parametrizações:

a) $\vec{r}(u, v) = (u + v)\vec{i} + (u - v)\vec{j} + (1 - 2u)\vec{k}$

b) $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - u - v)\vec{k}$.

Representar geometricamente, comparando os resultados.

6.8 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

Seja S uma superfície paramétrica suave, representada por

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in R.$$

Na seção 6.4, definimos as curvas coordenadas de S em um ponto P. Podemos considerar que, na u–curva $\vec{r}(u, v_0)$, o parâmetro u representa o tempo. Desta forma, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ representa o vetor velocidade de uma partícula que se desloca ao longo da u–curva.

Quando u sofre um acréscimo Δu, a partícula move-se uma distância aproximadamente igual a $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \Delta u$ sobre a u-curva.

Analogamente, para u fixo, a partícula move-se uma distância $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta v$, no tempo Δv, ao longo da v–curva $\vec{r}(u_0, v)$.

Os vetores $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \Delta u$ e $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta v$ determinam um paralelogramo (ver Figura 6.43), cuja área é dada por:

$$\Delta S = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v\right| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta u \, \Delta v.$$

A parte de S, correspondente ao retângulo de área $\Delta u \Delta v$ em R, é aproximada por esse paralelogramo de área ΔS.

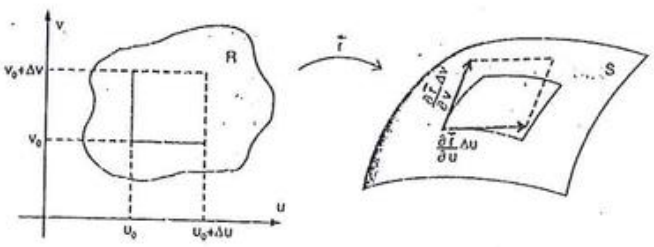


Figura 6.43

6.8.1 Definição

A área de S, denotada por $a(S)$, é definida pela equação

$$a(S) = \iint_R \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv \qquad (1)$$

quando a integral à direita existe.

Se S é suave por partes, a área de S é definida como a soma das áreas sobre cada pedaço suave de S.

6.8.2 Exemplos

(i) Determinar a área do parabolóide $z = 2(x^2 + y^2)$, abaixo do plano $z = 8$.

Solução. Conforme Exemplo 6.2.8, tomando u e v como parâmetros, uma equação vetorial desse parabolóide é:

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + 2(u^2 + v^2)\vec{k}, \quad (u, v) \in R,$$

$$R = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

Usando a Definição 6.8.1, vem

$$a(S) = \iint_R |(1, 0, 4u) \times (0, 1, 4v)| \, du dv$$

$$= \iint_R |(-4u, -4v, 1)| \, du dv$$

$$= \iint_R \sqrt{1 + 16(u^2 + v^2)} \, du dv.$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$a(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 16r^2} \, r \, dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{48}(1 + 16r^2)^{3/2} \Big|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{48}\left(65\sqrt{65} - 1\right) d\theta$$

$$= \frac{65\sqrt{65} - 1}{48} \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{(65\sqrt{65} - 1)\pi}{24} \text{ unidades de área.}$$

(ii) Determinar a área da esfera de raio a.

Solução. Vamos utilizar a equação vetorial da esfera de raio a determinada em 6.2.1, isto é,

$$\vec{r}(u, v) = a\cos v \cos u\vec{i} + a\cos v \operatorname{sen} u\vec{j} + a\operatorname{sen} v\vec{k},$$

$$0 \leq u \leq 2\pi \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

Usando a Definição 6.8.1, vem

$$a(S) = \iint_R \left| \left(a^2\cos^2 v \cos u, \; a^2\cos^2 v \operatorname{sen} u, \; a^2\cos v \operatorname{sen} v\right) \right| du dv$$

$$= \iint_R a^2 \cos v \, du dv$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\pi} a^2 \cos v \, du dv$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos v \, u \Big|_0^{2\pi} dv$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a^2 \cos v \, dv$$

$$= 4\pi a^2 \text{ unidades de área.}$$

(iii) Seja S uma superfície representada na forma explícita por $z = z(x, y)$. Usando x e y como parâmetros, escrever a integral que define a área de S.

Solução. Usando x e y como parâmetros, podemos representar S por

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}, \quad (x, y) \in R,$$

onde R é a projeção de S sobre o plano xy (ver Figura 6.44).

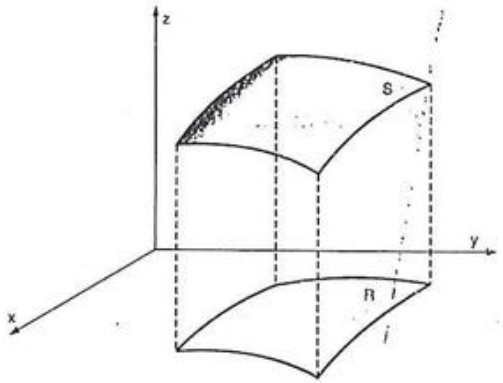


Figura 6.44

Assim,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ e}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}.$$

Logo, usando a Definição 6.8.1, vem

$$\boxed{a(S) = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dxdy.} \qquad (2)$$

(iv) Determinar a área do hemisfério de raio a, usando a representação explícita $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Solução. A Figura 6.45 mostra o hemisfério e a sua projeção R sobre o plano xy.

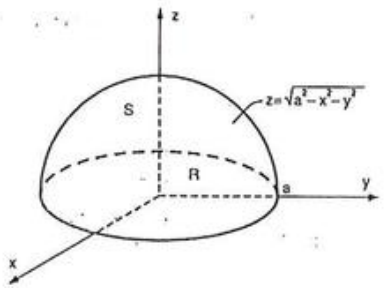


Figura 6.45

Temos,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -x\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^{-1/2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -y\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^{-1/2}.$$

Usando o resultado do exemplo anterior, vem

$$a(S) = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dxdy$$

$$= \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$a(S) = \iint_{R'} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, drd\theta,$$

onde $R' = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Esta integral é uma integral imprópria, que pode ser resolvida como segue:

$$a(S) = \lim_{t \to a} \int_0^t \left[\int_0^{2\pi} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, d\theta \right] dr$$

$$= \lim_{t \to a} \int_0^t ar\left(a^2 - r^2\right)^{-1/2}\, 2\pi\, dr$$

$$= \lim_{t \to a} \left(2\pi a^2 - 2\pi a\left(a^2 - t^2\right)^{1/2}\right)$$

$$= 2\pi a^2 \text{ unidades de área.}$$

(v) Encontrar a área da superfície cônica $x^2 = y^2 + z^2$ que está entre os planos $x = 1$ e $x = 4$.

Solução. Conforme vimos no Exemplo 6.2.10(iii), uma parametrização da superfície cônica é dada por

$$\vec{r}(y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}\, \vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (y, z) \in R,$$

onde R é o anel circular no plano yz, delimitado pelas circunferências $y^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$.

Usando a Definição 6.8.1, temos

$$a(S) = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right)^2}\, dydz$$

$$= \iint_R \sqrt{2}\, dydz.$$

Passando para coordenadas polares, vem

$$a(S) = \int_0^{2\pi} \int_1^4 \sqrt{2}\, r\, drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, \frac{r^2}{2} \Big|_1^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{15\sqrt{2}}{2}\, d\theta$$

$$= 15\sqrt{2}\pi \text{ unidades de área.}$$

6.9 INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UM CAMPO ESCALAR

De certa forma, as integrais de superfície são análogas às integrais curvilíneas. Definimos as integrais curvilíneas usando uma representação paramétrica de uma curva. Definiremos as integrais de superfície usando uma representação paramétrica da superfície.

6.9.1 Definição

Seja S uma superfície suave, representada por $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$. Seja f um campo escalar definido e limitado sobre S. A integral de superfície de f sobre S, denotada por $\iint_S f dS$, é definida pela equação

$$\boxed{\iint_S f dS = \iint_R f(\vec{r}(u,\ v)) \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du dv} \quad , \qquad (1)$$

quando a integral dupla à direita existe.

Se S é suave por partes, $\iint_S f dS$ é definida como a soma das integrais sobre cada pedaço suave de S.

Se S é dada na forma explícita por $z = z(x, y)$, então

$$\boxed{\iint_S f dS = \iint_R f(x,\ y,\ z(x,\ y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy} \quad , \qquad (2)$$

onde R é a projeção de S sobre o plano xy.

6.9.2 Exemplos

(i) Calcular $I = \iint_S (z - x^2 + xy^2 - 1)\, dS$, onde S é a superfície

$$\vec{r}(u,\ v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + 1)\vec{k},$$

$$0 \le u \le 2 \text{ e } 0 \le v \le 5.$$

Solução. A superfície deste exemplo é a parte da frente da calha que pode ser visualizada na Figura 6.6 do Exemplo 6.1.3.

Usando a equação (1), temos

$$I = \iint_S (z - x^2 + xy^2 - 1)\ dS$$

$$= \iint_R (u^2 + 1 - u^2 + uv^2 - 1)\sqrt{4u^2 + 1}\ du dv$$

$$= \int_0^5 \int_0^2 uv^2 \sqrt{4u^2 + 1}\ du dv$$

$$= \int_0^5 v^2 \left.\frac{1}{8} \frac{(4u^2 + 1)^{3/2}}{3/2}\right|_0^2 dv$$

$$= \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 1) \int_0^5 v^2\, dv$$

$$= \frac{125\,(17\sqrt{17} - 1)}{36}.$$

(ii) Calcular $I = \iint_S x^2 z\, dS$, onde S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.

Solução. A Figura 6.46 mostra a superfície S e a sua projeção R sobre o plano xy.

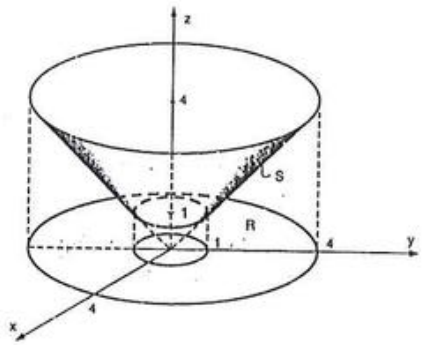


Figura 6.46

Usando a equação (2), temos

$$I = \iint_S x^2 z\, dS$$

$$= \iint_R x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy$$

$$= \sqrt{2} \iint_R x^2 \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Passando para coordenadas polares, vem

$$I = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^4 \cos^2\theta \, dr d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, \frac{r^5}{5}\Big|_1^4 \, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 1023}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \pi.$$

(iii) Calcular $I = \iint_S (x + y + z)\, dS$, onde $S = S_1 \cup S_2$ é a superfície representada na Figura 6.47.

Solução. A superfície S é uma superfície suave por partes. Aplicando a Definição 6.9.1 sobre cada parte suave, vem

$$I = \iint_S (x + y + z)\, dS$$

$$= \iint_{S_1} (x + y + z)\, dS + \iint_{S_2} (x + y + z)\, dS.$$

Para calcular $\iint_{S_1} (x + y + z)\, dS$ usamos a equação (2).

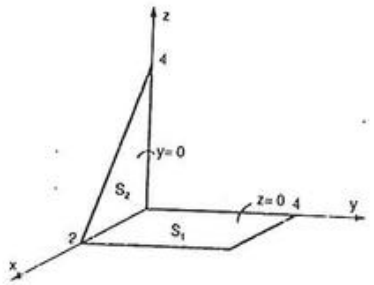


Figura 6.47

Temos,

$$\iint_{S_1} (x + y + z)\, dS = \int_0^4 \int_0^2 (x + y + 0)\, \sqrt{1 + 0 + 0}\, dxdy$$

$$= \int_0^4 \int_0^2 (x + y)\, dxdy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + yx\right)\Big|_0^2 dy$$

$$= \int_0^4 (2 + 2y)\, dy$$

$$= 24.$$

Para calcular $\iint_{S_2} (x + y + z)\, dS$ não podemos usar a equação (2), pois a superfície S_2 é representada explicitamente como $y = y(x, z)$. No entanto, podemos reescrever (2) como

$$\iint_S f dS = \iint_{R'} f(x,\ y(x,\ z),\ z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz, \qquad (3)$$

onde R' é a projeção de S sobre o plano xz.

Usando (3), vem

$$\iint_{S_2} (x + y + z)\, dS = \iint_{R} (x + 0 + z)\, \sqrt{1 + 0 + 0}\; dxdz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (x + z)\; dzdx$$

$$= 8.$$

Portanto, $I = 24 + 8 = 32$.

6.10 CENTRO DE MASSA E MOMENTO DE INÉRCIA

O centro de massa e o momento de inércia de uma lâmina delgada podem ser calculados usando-se integrais de superfície.

Suponhamos que S represente a lâmina e que o campo escalar $f(x, y, z)$ represente a densidade (massa por unidade de área) no ponto (x, y, z). Então a *massa* m da lâmina é dada por

$$m = \iint_S f(x, y, z)\, dS. \tag{1}$$

O *centro de massa* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x f(x, y, z)\, dS \tag{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y f(x, y, z)\, dS \tag{3}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z f(x, y, z)\, dS. \tag{4}$$

O *momento de inércia* I_L de S em relação a um eixo L é dado por

$$I_L = \iint_S [\delta(x, y, z)]^2 f(x, y, z)\, dS, \tag{5}$$

onde $\delta(x, y, z)$ é a distância do ponto (x, y, z) de S até o eixo L.

6.10.1 Exemplos

(i) Uma lâmina tem a forma da parte do plano $z = y$ recortada pelo cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Determinar a massa dessa lâmina se a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional à distância desse ponto ao plano xy.

Solução. A Figura 6.48 mostra a superfície S que representa a lâmina e a sua projeção R no plano xy.

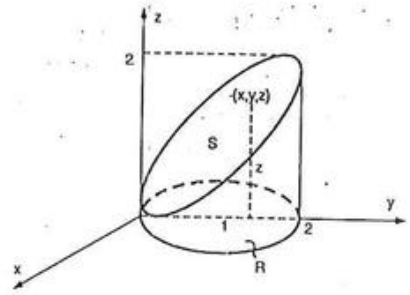


Figura 6.48

Como a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional a distância desse ponto ao plano xy, temos

$f(x, y, z) = kz$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

Usando 6.10(1), vem

$$m = \iint_S f(x, y, z)\, dS$$

$$= \iint_S kz\, dS$$

$$= k\iint_R y\sqrt{1+0+1}\ dxdy$$

$$= \sqrt{2}\,k\iint_R y\ dxdy.$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$m = \sqrt{2}\,k\int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^2\operatorname{sen}\theta\ drd\theta$$

$$= \sqrt{2}\,k\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\ \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

$$= \frac{8\sqrt{2}k}{3}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4\theta\ d\theta$$

$$= \sqrt{2}\,k\,\pi \text{ unidades de massa.}$$

(ii) Determinar o centro de massa do hemisfério $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ com densidade $f(x, y, z) = 0{,}3$ unidades de massa/unidades de área.

Solução. Vamos, neste exemplo, usar uma representação paramétrica para o hemisfério superior S:

$$\vec{r}(u, v) = \cos u\ \cos v\,\vec{i} + \operatorname{sen} u\ \cos v\,\vec{j} + \operatorname{sen} v\,\vec{k},\ 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}.$$

Como a densidade é constante, podemos dizer que

massa = área de S × densidade constante.

Portanto,

$$m = 2\pi \cdot 1^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6\pi \text{ unidades de massa.}$$

Ainda, devido à simetria de S, as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de massa são nulas.

Falta-nos, portanto, calcular $\bar{z}$. Temos,

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z f(x, y, z)\ dS.$$

Usando a equação 6.9(1), vem

$$\bar{z} = \frac{1}{0{,}6\pi}\iint_R \operatorname{sen} v \cdot 0{,}3 \cdot \cos v\ dudv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} v\ \cos v\ dudv$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Portanto, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

(iii) Uma lâmina tem a forma de um hemisfério unitário. Encontrar o momento de inércia dessa lâmina em relação a um eixo que passa pelo pólo e é perpendicular ao plano que delimita o hemisfério. Considerar a densidade no ponto P da lâmina proporcional a distância deste ponto ao plano que delimita o hemisfério.

Solução. Podemos representar a lâmina como mostra a Figura 6.49. Neste caso, o eixo que passa pelo pólo e é perpendicular ao plano que delimita o hemisfério é o eixo dos z.

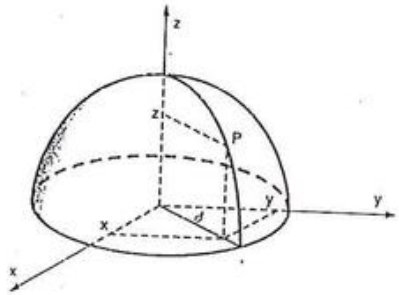


Figura 6.49

A densidade é $f(x, y, z) = kz$.

Usando 6.10(5), vem

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\ kz\ dS,$$

onde $\delta^2(x, y, z) = x^2 + y^2$ (ver Figura 6.49).

Aplicando 6.9(2), temos

$$I_z = k \iint_R (x^2 + y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2}\ \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}}\ dxdy$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$I_z = k \iint_{R'} r^2\sqrt{1 - r^2}\ \sqrt{1 + \frac{r^2\cos^2\theta}{1 - r^2} + \frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{1 - r^2}}\ rdrd\theta,$$

onde $R' = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Resolvendo esta integral imprópria, obtemos

$$I_z = \lim_{t \to 1} \int_0^t \int_0^{2\pi} r^3\, d\theta\ dr$$

$$= \frac{k\pi}{2} \text{ unidades de momento de inércia.}$$

6.11 EXERCÍCIOS

1. Calcular a área da superfície plana $2x + 2y + 3z = 6$, tomada no 1º octante.
2. Calcular a área da superfície do parabolóide $y = 3 - (x^2 + z^2)$ interceptado pelo plano $y = 0$.
3. Encontrar a área da superfície do cilindro $x^2 + z^2 = 25$ limitada pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 3$.
4. Encontrar a área do parabolóide $z = x^2 + y^2$ limitado superiormente pelo plano $z = 2$.
5. Achar a área da superfície do plano $2x + y + 2z = 16$, interceptado por
   a) $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ e $y = 3$;
   b) $x = 0$, $y = 0$ e $x^2 + y^2 = 36$, no 1º octante.

6. Achar a área da superfície do cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ interceptado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.
7. Determinar a área da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 3x$.
8. Calcular a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ interior ao cilindro $y^2 + z^2 = 4z$.
9. Calcular a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
10. Calcular a área da parte do parabolóide $x = y^2 + z^2$ delimitada pelos planos $x = 4$ e $x = 9$.
11. Determinar a área da porção esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, cortada pela parte superior do cone $x^2 + y^2 = z^2$.
12. Determinar a área da porção do plano $z = 4x$, cortada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
13. Determinar a área da superfície plana $x + y + z = 8$ delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
14. Calcular a área da parte do parabolóide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ acima do plano xy.
15. Calcular a área da parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está no interior do parabolóide $z = 2x^2 + 2y^2$.
16. Determinar a área da superfície do parabolóide $z = x^2 + y^2$ exterior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
17. Calcular a área da parte do plano $2x + 2y + z = 4$ compreendida no interior da superfície prismática $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$.
18. Calcular a área total da superfície cuja lateral é parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$; cuja parte superior é uma porção do hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e cuja parte inferior é a porção do plano $z = 0$.
19. Calcular a área da superfície plana $\frac{1}{2}x + z = 4$ recortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
20. Calcular a área da superfície do tetraedro cujas faces são partes dos planos $z = 0$, $y = 0$, $x + 4y + 2z = 8$ e $-2x + 4y + 2z = 8$.
21. Seja S a face da frente do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $a, b, c > 0$. Mostrar que a área de S é dada por $A_S = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$, onde A_1, A_2 e A_3 são as áreas das outras faces do tetraedro.

22. Uma superfície S é representada pela equação vetorial

$$\vec{r}(u, v) = \cos v\vec{i} + \text{sen } v\vec{j} + u\vec{k},\ 0 \le u \le 4,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

a) Mostrar que S é uma parte de uma superfície de revolução.

b) Determinar a área de S.

23. Dada a equação vetorial $\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\text{sen } v, u^2)$:

a) eliminar os parâmetros u e v determinando a equação cartesiana da superfície;

b) fazer um esboço e indicar o significado geométrico dos parâmetros u e v;

c) determinar a área da parte da superfície que está entre os planos $z = 0$ e $z = 4$.

24. Mostrar que:

a) Se S é uma superfície dada na forma explícita pela equação $y = y(x, z)$, então

$$\iint_S f dS = \iint_R f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\ dxdz,$$

onde R é a projeção de S sobre o plano xz.

b) Se S é dada por $x = x(y, z)$, então

$$\iint_S f dS = \iint_{R'} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\ dydz,$$

onde R' é a projeção de S sobre o plano yz.

25. Calcular $\iint_S (x + y + z)\, dS$, onde:

a) S é a face superior do cubo $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$.

b) S é a face da frente do cubo do item (a).

26. Calcular $\iint_S x(z^2 + y^2)\, dS$, onde S é o hemisfério da frente da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

27. Calcular $\iint_S x^2 z ds$, onde S é a superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1; 0 \le z \le 1$.

28. Calcular $\iint_S (x + z)\, dS$, onde S é a superfície plana $2x + 2y + z = 6$, tomada no 1º octante.

29. Calcular $\iint_S xyz\, dS$, sendo S a superfície plana $3x + 2y + z = 12$, delimitada pelos planos $y = 0$, $y = 2$, $x = 1$ e $x = 0$.

30. Calcular $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$, onde S é a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

31. Calcular $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\ dS$, onde S é a superfície lateral do cone

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0,\ 0 \le z \le 16.$$

32. Calcular $\iint_S xz\, dS$, sendo S a parte da superfície $y = x^2$, delimitada pelos planos $z = 0$, $z = 4$, $x = 0$, e $x = 2$.

33. Calcular $\iint_S 2z\, dS$, sendo S a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2 - 2$ abaixo do plano xy.

34. Calcular $\iint_S xdS$, sendo S a superfície plana $z - x = 2$ recortada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

35. Calcular $\iint_S y\, dS$, sendo S a parte do plano $x = 2$, recortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 4$.

36. Calcular $I = \iint_S \frac{1}{x}\, dS$, onde S é a superfície

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (v + 1)\vec{k};\ 1 \le u \le 2 \text{ e } -1 \le v \le 1.$$

37. Uma lâmina tem a forma da superfície lateral do cone $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $0 \le z \le 2$. Calcular a massa da lâmina se a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional a distância desse ponto ao eixo dos z.

38. Uma lâmina tem a forma da superfície do cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ limitado por $z = 0$ e $z = 3$. Determinar o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo z se a densidade é $f(x, y, z) = 1$.

39. Uma lâmina tem a forma da parte do plano $z = 2y + 1$ recortada pelo cilindro $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Determinar a massa dessa lâmina se a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional a distância desse ponto ao plano xy.

40. Calcular o centro de massa da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, que está abaixo do plano $z = 2$ e acima do plano xy, supondo a densidade constante.

41. Uma superfície S é representada pela equação vetorial
$\vec{r}(u, v) = (4\cos u, 4\operatorname{sen} u, 4v)$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2$.

a) Determinar a equação cartesiana de S.

b) Desenhar sobre a superfície S as curvas coordenadas obtidas fixando $u = \dfrac{\pi}{3}$ e $v = 1$, respectivamente.

c) Determinar o vetor $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ no ponto onde $u = \dfrac{\pi}{3}$ e $v = 1$, representando-o no correspondente ponto P de S.

d) Supondo que uma lâmina de densidade constante é representada por $\vec{r}(u, v)$, determinar o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo z.

42. Uma lâmina esférica é representada pela equação vetorial
$\vec{r}(u, v) = (a\cos u \cos v, a\operatorname{sen} u \cos v, a\operatorname{sen} v)$, $0 \le u \le 2\pi$ e $-\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2}$.

a) Supondo $a = 4$, representar sobre a esfera as curvas coordenadas obtidas fixando $u = \dfrac{\pi}{4}$ e $v = \dfrac{\pi}{6}$, respectivamente.

b) Determinar os vetores tangentes $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ e $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right)$, representando-os sobre a esfera.

c) Determinar o vetor $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ representando-o no correspondente ponto P.

d) Supondo que a densidade da esfera é constante, calcular o momento de inércia da esfera com relação ao eixo y.

6.12 INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UM CAMPO VETORIAL

No Capítulo V, vimos que a integral curvilínea de um campo vetorial depende do sentido de percurso sobre C, isto é, depende da orientação da curva. Analogamente, veremos que a integral da superfície de um campo vetorial dependerá do lado da superfície escolhido para a integração. Todas as superfícies consideradas serão superfícies orientáveis.

6.12.1 Definição

Sejam S uma superfície suave, representada por
$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, $(u, v) \in R$, e $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$ um vetor unitário, normal a S. Seja $\vec{f}$ um campo vetorial definido sobre S. A integral de superfície de $\vec{f}$ sobre S, denotada por $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, é definida pela equação

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv, \qquad (1)$$

quando a integral à direita existe.

Se a superfície S é suave por partes, a integral é definida como a soma das integrais sobre cada pedaço suave de S.

6.12.2 Cálculo da Integral $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$

Seja $\vec{n}_1$ o vetor normal unitário de S, dado por

$$\vec{n}_1 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}.$$

Podemos ter $\vec{n} = \vec{n}_1$ ou $\vec{n} = -\vec{n}_1$. Portanto, substituindo em (1), vem

$$\boxed{\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \pm \iint_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv} \qquad (2)$$

Teremos o sinal positivo em frente à integral dupla, quando o lado de S escolhido para a integração for o lado do qual emana o vetor normal unitário $\vec{n}_1$. Em caso contrário, teremos o sinal negativo em frente à integral dupla.

6.12.3 Exemplos

(i) Calcular $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e S a superfície exterior da esfera representada por

$$\vec{r}(u, v) = (a\cos u \cos v, a\operatorname{sen} u \cos v, a\operatorname{sen} v),\ 0 \le u \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}.$$

Solução. No Exemplo 6.6.5 (i), calculamos $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, obtendo

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (a^2\cos u \cos^2 v, a^2\operatorname{sen} u \cos^2 v, a^2\operatorname{sen} v \cos v).$$

Vimos também que este vetor aponta para o exterior da esfera (ver Figura 6.37).

Como o lado escolhido para a integração é o lado exterior de S, teremos o sinal (+) em frente à integral dupla.

Usando a equação (2), vem

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS &= \iint_R (a\cos u \cos v, a\operatorname{sen} u \cos v, a\operatorname{sen} v) \cdot \\
&\qquad (a^2\cos u \cos^2 v, a^2\operatorname{sen} u \cos^2 v, a^2\operatorname{sen} v \cos v)\, du dv \\
&= \iint_R (a^3\cos^2 u \cos^3 v + a^3\operatorname{sen}^2 u \cos^3 v + a^3 sen^2 v \cos v)\, du dv \\
&= \iint_R (a^3\cos^3 v + a^3\operatorname{sen}^2 v \cos v)\, du dv \\
&= \iint_R a^3\cos v\, du dv \\
&= a^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v\, dv du \\
&= 4\pi a^3.
\end{aligned}$$

(ii) Seja S a superfície exterior do parabolóide $\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $(x, y) \in R$, onde $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$. Determinar $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{f}$ o campo vetorial dado por $\vec{f} = (3x, 3y, -3z)$.

Solução. No Exemplo 6.6.5 (ii), vimos que o vetor normal unitário

$$\vec{n}_1 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}}{\left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right|}$$

aponta para o interior do parabolóide dado (ver Figura 6.38). Como o lado escolhido para a integração é o lado exterior de S, teremos o sinal (−) em frente à integral dupla.

Como $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$, usando a equação (2), vem

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_R (3x,\ 3y,\ -3(x^2 + y^2)) \cdot (-2x,\ -2y,\ 1)\, dxdy$$

$$= -\iint_R (-6x^2 - 6y^2 - 3x^2 - 3y^2)\, dxdy$$

$$= 9 \iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = 9 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3\, d\theta dr$$

$$= 72\pi.$$

6.12.4 A Notação $\iint_S (f_1\, dydz + f_2\, dzdx + f_3\, dxdy)$

Se a superfície S é representada por $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, $(u, v) \in R$, o vetor $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ pode ser escrito na forma

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\vec{k}.$$

Assim, se o campo vetorial $\vec{f}$ é dado por

$\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$, usando a equação (2), podemos escrever

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \pm \iint_R f_1(\vec{r}(u,\ v))\, \frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}\, dudv \pm$$

$$\iint_R f_2(\vec{r}(u,\ v))\, \frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}\, dudv \pm$$

$$\iint_R f_3(\vec{r}(u,\ v))\, \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\, dudv.$$

Estas integrais lembram a fórmula de mudança de variáveis para integrais duplas e sugerem a notação tradicional.

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (f_1\, dydz + f_2\, dzdx + f_3\, dxdy). \tag{3}$$

6.12.5 Interpretação Física da Integral $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$

Consideremos um fluido em movimento em um domínio D do espaço. Sejam $\vec{v}(x, y, z)$ o vetor velocidade do fluido no ponto (x, y, z) e $\rho(x, y, z)$ a sua densidade. Seja $\vec{f}$ o campo vetorial dado por

$$\vec{f}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, \vec{v}(x, y, z).$$

O vetor $\vec{f}$ tem a mesma direção da velocidade e seu comprimento tem dimensões

$$\frac{\text{massa}}{\text{unid. vol.}} \cdot \frac{\text{distância}}{\text{unid. tempo}} = \frac{\text{massa}}{(\text{unid. área})\,(\text{unid. tempo})}.$$

Assim, podemos dizer que $\vec{f}$ representa a quantidade de massa de fluido, por unidade de área e por unidade de tempo, que escoa na direção de $\vec{v}$, em um ponto qualquer $(x, y, z) \in D$.

Sejam S: $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$, uma superfície paramétrica suave, contida em D, e $\vec{n}$ um vetor unitário, normal a S. A componente de $\vec{f}$ na direção de $\vec{n}$ (ver Figura 6.50), é dada por

$$|\vec{f}|\cos\alpha = |\vec{f}|\,|\vec{n}|\cos\alpha$$

$$= \vec{f} \cdot \vec{n}.$$

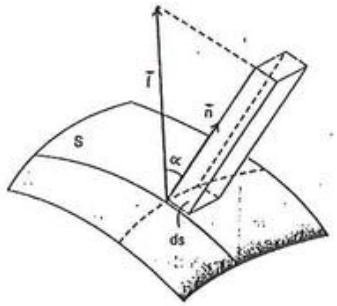


Figura 6.50

Portanto, se dS é o elemento de área de superfície de S, o produto $(\vec{f} \cdot \vec{n})dS$ representa o volume de um prisma cuja área da base é dS e cuja altura é a componente de $\vec{f}$ na direção de $\vec{n}$. Podemos, então, dizer que $(\vec{f} \cdot \vec{n})dS$ nos dá a quantidade de massa de fluido que atravessa dS, na direção de $\vec{n}$, em uma unidade de tempo.

A quantidade total de massa de fluido que atravessa a superfície S, na direção de $\vec{n}$, em uma unidade de tempo, será dada por

$$\boxed{\phi = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS}, \tag{4}$$

e é chamada *fluxo do campo vetorial* $\vec{f}$, através da superfície S.

6.12.6 Exemplos

(i) Um fluido de densidade constante, com velocidade $\vec{v} = (-2x, -2y, z)$, escoa através da superfície S, dada por $\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, u^2-1)$, $0 \le u \le 4$, $0 \le v \le 2\pi$, na direção do vetor $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Determinar a massa de fluido que atravessa S em uma unidade de tempo.

Solução. Devemos calcular

$$\phi = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS,$$

onde $\vec{f} = \rho_0(-2x, -2y, z)$, sendo ρ_0 uma constante.

Como queremos o fluxo na direção de $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, teremos o sinal (+) em frente à integral dupla.

Como

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 2u \\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-2u^2\cos v, -2u^2\operatorname{sen} v, u),$$

usando a equação (2), vem

$$\phi = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= +\iint_R \rho_0(-2u\cos v, -2u\operatorname{sen} v, u^2 - 1) \cdot (-2u^2\cos v, -2u^2\operatorname{sen} v, u)\, du dv$$

$$= \rho_0 \int_0^4 \int_0^{2\pi} (4u^3\cos^2 v + 4u^3\operatorname{sen}^2 v + u^3 - u)\, dv du$$

$$= 624\pi\, \rho_0 \text{ unidades de fluxo.}$$

(ii) Sejam S a superfície plana limitada pelo triângulo de vértices (4, 0, 0), (0, 4, 0) e (0, 0, 4) e $\vec{n}$ um vetor unitário, normal a S, com componente z não-negativa. Usando a representação vetorial de S dada por

$$\vec{r}(u, v) = (u + 2v, u - 2v, 4 - 2u),$$

determinar o fluxo do campo vetorial $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, através da superfície S, na direção de $\vec{n}$.

Solução. A Figura 6.51 mostra a superfície S e o vetor $\vec{n}$.

Usando a representação vetorial dada, temos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}.$$

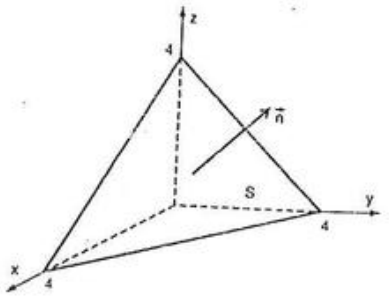


Figura 6.51

Como o vetor normal unitário escolhido para integração tem componente z não-negativa e a componente z do vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ é negativa, teremos o sinal negativo em frente à integral dupla.

Usando a equação (2), vem

$$\begin{aligned}
\phi &= \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS \\
&= -\iint_R (u + 2v,\ u - 2v,\ 4 - 2u) \cdot (-4,\ -4,\ -4)\, du dv \\
&= -\iint_R [-4(u + 2v) - 4(u - 2v) - 4(4 - 2u)]\, du dv \\
&= 16 \iint_R du dv \\
&= 16\, A_R.
\end{aligned}$$

Para determinar a região R, devemos resolver o sistema de inequações

$$\begin{cases} 0 \le u + 2v \le 4 \\ 0 \le u - 2v \le 4 \\ 0 \le 4 - 2u \le 4. \end{cases}$$

Este sistema pode ser resolvido geometricamente (ver Figura 6.52).

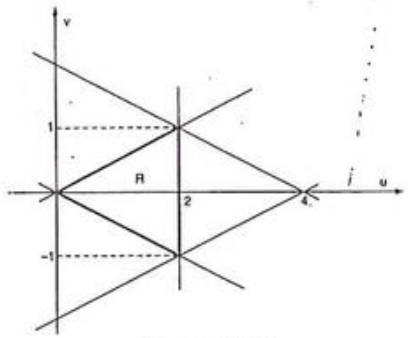


Figura 6.52

Temos, então,

$$\begin{aligned}
\phi &= 16 \cdot \frac{2.2}{2} \\
&= 32 \text{ unidades de fluxo.}
\end{aligned}$$

(iii) Seja S uma superfície suave representada na forma explícita por $z = z(x, y)$. Usando x e y como parâmetros, determinar uma equação para calcular $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$.

Solução. Usando x e y como parâmetros, podemos representar S por

$$\vec{r}(x,\ y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,\ y)\vec{k},\ (x,\ y) \in R,$$

onde R é a projeção de S sobre o plano xy.

Analisando o vetor

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k},$$

vemos que ele tem componente z positiva.

Portanto, se $\vec{n}$ é um vetor unitário, normal a S, com componente z positiva, usando a equação (2), temos

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS &= +\iint_R \vec{f}(\vec{r}(x,\ y)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) dx dy \\
&= \iint_R \left[-f_1(x,\ y,\ z(x,\ y))\frac{\partial z}{\partial x} - f_2(x,\ y,\ z(x,\ y))\frac{\partial z}{\partial y}\right. \\
&\qquad \left. + f_3(x,\ y,\ z(x,\ y))\right] dx dy.
\end{aligned}$$

Se a componente z do vetor $\vec{n}$ for negativa, teremos o sinal (–) em frente à integral dupla.

Portanto, simplificando a notação, podemos escrever

$$\boxed{\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \pm \iint_R \left[-f_1 \frac{\partial z}{\partial x} - f_2 \frac{\partial z}{\partial y} + f_3\right] dx dy} \qquad (5)$$

(iv) Resolver o exemplo (ii), usando a forma explícita $z = 4 - x - y$.

Solução. Como o vetor $\vec{n}$, dado no exemplo (ii), tem componente z positiva, usando a equação (5), temos

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R [-x(-1) - y(-1) + 4 - x - y]\, dxdy$$

$$= \iint_R 4\, dxdy$$

$$= 4A_R.$$

Neste caso, a região R é a projeção de S sobre o plano xy, que pode ser vista na Figura 6.53. Portanto,

$$\phi = 4 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 32 \text{ unidades de fluxo.}$$

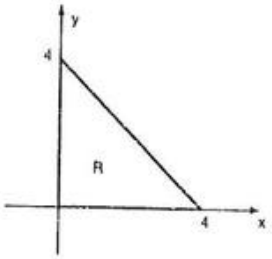


Figura 6.53

(v) Seja S a parte do cone $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com a normal apontando para fora. Calcular

$$\iint_S (2\, dydz + 5\, dzdx + 3\, dxdy).$$

Solução. Na Figura 6.54 (a), representamos a superfície S e a normal dada, em alguns pontos de S. A Figura 6.54 (b), mostra a região R, que é a projeção de S sobre o plano xy.

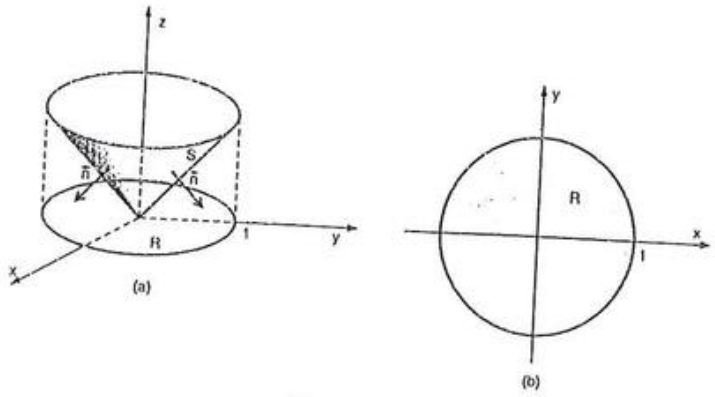


Figura 6.54

Observando a Figura 6.54 (a), vemos que o vetor normal $\vec{n}$ tem componente z negativa. Portanto, usando a equação (5), temos

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (2\, dydz + 5\, dzdx + 3\, dxdy)$$

$$= -\iint_R \left(-2\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 5\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 3 \right) dxdy.$$

Esta integral é uma integral imprópria. Passando para coordenadas polares, temos

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{-2r\cos\theta}{r} - \frac{5r\,\text{sen}\,\theta}{r} + 3 \right] r\,dr\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[\lim_{h \to 0^+} \int_h^1 (-2\cos\theta - 5\,\text{sen}\,\theta + 3) r\,dr \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-2\cos\theta - 5\,\text{sen}\,\theta + 3)\, d\theta$$

$$= -3\pi.$$

Observamos que a superfície dada neste exemplo não é suave na região de integração, pois ela apresenta problemas na origem. No entanto, foi possível calcular a integral dada,

através de uma integral imprópria. Sempre que a superfície apresenta problemas em um ponto, podemos adotar este procedimento. Neste caso, a integral de superfície existe quando a integral imprópria converge.

(vi) Sejam S uma superfície paramétrica suave, representada por $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$ e $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$ um vetor unitário, normal a S. Se $\vec{f}$ é um campo vetorial contínuo definido sobre S e T é a componente de $\vec{f}$ na direção de $\vec{n}$, mostrar que

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S T\, dS.$$

Solução. Pela Definição 6.12.1, temos

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

A componente de $\vec{f}$ na direção de $\vec{n}$ é dada por

$$T = |\vec{f}| \cos \alpha,$$

onde α é o ângulo entre $\vec{f}$ e $\vec{n}$ (ver Figura 6.55).

Como $\vec{n}$ é unitário, temos

$$T = |\vec{f}|\,|\vec{n}| \cos \alpha$$

$$= \vec{f} \cdot \vec{n}.$$

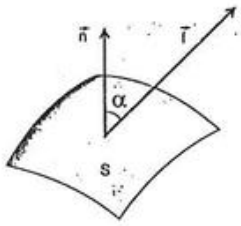


Figura 6.55

Portanto,

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R T(u, v) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv,$$

e assim, pela Definição 6.9.1, temos

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S T\, dS.$$

Este resultado nos permite fazer uma análise da integral de superfície de um campo vetorial em diversas situações práticas, como segue:

a) Se em cada ponto da superfície S, o campo vetorial $\vec{f}$ for perpendicular ao vetor $\vec{n}$, a integral de $\vec{f}$ sobre S será nula. Em particular, se $\vec{f}$ representa a densidade de fluxo de um fluido em movimento, será nulo o fluxo através da superfície S.

b) Se o ângulo entre $\vec{f}$ e $\vec{n}$ for agudo, a componente de $\vec{f}$ na direção de $\vec{n}$ será positiva e desta forma, teremos um fluxo positivo através de S.

c) Se o ângulo entre $\vec{f}$ e $\vec{n}$ for obtuso, a componente de $\vec{f}$ na direção de $\vec{n}$ será negativa. Neste caso, teremos um fluxo negativo através de S. Na prática, isto significa que o fluido estará atravessando a superfície S no sentido contrário ao do vetor $\vec{n}$.

A Figura 6.56 esquematiza as três situações descritas.

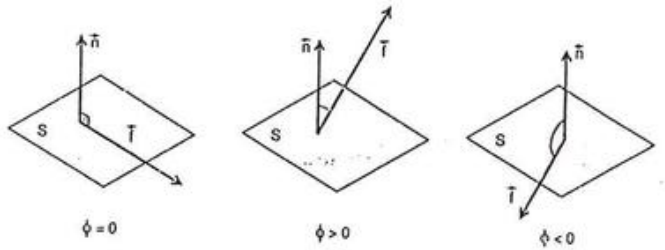


Figura 6.56

(vii) Determinar o fluxo do campo vetorial $\vec{f} = (x, y, 0)$ através da superfície exterior do sólido $x^2 + y^2 \leq 9$, $0 \leq z \leq 4$.

Solução. Como a superfície dada é formada por 3 partes suaves S_1, S_2 e S_3 (ver Figura 6.57), temos

$$\phi = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_3} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS.$$

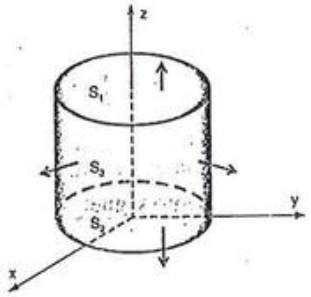


Figura 6.57

Para as superfícies S_1 e S_2, temos $\vec{n} = \vec{k}$ e $\vec{n} = -\vec{k}$, respectivamente. Como $\vec{f} = (x, y, 0)$, em ambos os casos, a componente de $\vec{f}$ na direção de $\vec{n}$ é nula. Portanto, usando o exemplo anterior, concluímos que

$$\iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = 0.$$

Para calcular $\iint_{S_3} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, precisamos de uma parametrização de S_3. Conforme vimos em 6.2.3, S_3 pode ser representada por $\vec{r}(u, v) = (3\cos u, 3\operatorname{sen} u, v)$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 4$.

Como $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (3\cos u, 3\operatorname{sen} u, 0)$, usando a equação (2), temos

$$\iint_{S_3} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R (3\cos u,\ 3\operatorname{sen} u,\ 0) \cdot (3\cos u,\ 3\operatorname{sen} u,\ 0)\, du dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 9(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)\, du dv$$

$$= 72\pi.$$

Logo,

$$\phi = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_3} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= 0 + 0 + 72\pi$$

$$= 72\pi \text{ unidades de fluxo.}$$

6.13 EXERCÍCIOS

1. Provar que

a) Se a superfície S é dada na forma explícita por $y = y(x, z)$, $(x, z) \in R'$, onde R' é a projeção de S sobre o plano xz e $\vec{n}$ denota a normal unitária de S com componente y não-negativa, obtemos:

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S f_1\, dydz + f_2\, dzdx + f_3\, dxdy$$

$$= \iint_{R'} \left(-f_1 \frac{\partial y}{\partial x} + f_2 - f_3 \frac{\partial y}{\partial z}\right) dxdz.$$

b) De maneira análoga, se S é dada por $x = x(y, z)$, $(y, z) \in R''$, onde R'' é a projeção de S sobre o plano yz e $\vec{n}$ denota a normal unitária de S com componente x não-negativa, temos:

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy$$

$$= \iint_{R''} \left(f_1 - f_2 \frac{\partial x}{\partial y} - f_3 \frac{\partial x}{\partial z}\right) dydz.$$

2. Seja T a superfície exterior do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 4$. Calcular

$$I = \iint_S (yz\, dydz + xz\, dzdx + xy\, dxdy),$$

onde:

a) S é a face da frente de T;

b) S é a face de T que está no plano xz;

c) S é a face de T que está no plano yz;

d) S é a face de T que está no plano xy;

e) Some os resultados dos itens a, b, c e d. Interprete fisicamente.

3. Um fluido tem vetor densidade de fluxo $\vec{f} = x\vec{i} - (2x + y)\vec{j} + \vec{k}$. Seja S o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ e $\vec{n}$ a normal que aponta para fora. Calcular a massa de fluido que atravessa S na direção de $\vec{n}$ em uma unidade de tempo.

4. Calcular $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{f} = y\vec{i} - x\vec{j}$ e S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no 1º octante com a normal apontando para fora.

5. Calcular $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, S a parte do plano $2x + 3y + 4z = 12$ cortada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ e $y = 2$, e $\vec{n}$ a normal com componente z não-negativa.

6. Calcular $I = \iint_S x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z^2 dxdy$, onde S é a superfície exterior da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

7. Calcular $\iint_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy$, onde S é a superfície exterior do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ limitada pelos planos $y = -4$ e $y = 4$.

Nos exercícios de 8 a 11 calcular a integral de superfície dada.

8. $\iint_S x\, dydz + 2y\, dzdx + 3z\, dxdy$, onde S é a superfície plana delimitada pelo triângulo de vértices $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$ e a normal afasta-se da origem.

9. $\iint_S dydz + dzdx + dxdy$, onde S é a superfície exterior do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ delimitado pelos planos $z = 1$ e $z = 4$.

10. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, onde S é a superfície plana $x + y = 2$, delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $z = 4$ e a normal se afasta da origem.

11. $\iint_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy$, onde S é a superfície plana $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 - 2u$, tomada no 1º octante e a normal afasta-se da origem.

12. Calcular $I = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{f} = x\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e S a superfície exterior da esfera $\vec{r}(u, v) = (2\cos u \cos v, 2\operatorname{sen} u \cos v, 2 \operatorname{sen} v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$ e $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

13. Seja S a superfície plana limitada pelo triângulo de vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$ e $\vec{n}$ um vetor unitário normal a S, com componente z não negativa. Determinar o fluxo do campo vetorial $\vec{f} = y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$, através da superfície S, na direção de $\vec{n}$.

14. Determinar o fluxo do campo vetorial $\vec{f} = (0, 2x, 2y)$ através da superfície exterior do sólido $x^2 + y^2 \leq 16$, $0 \leq z \leq 4$.

15. Calcular $I = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{f} = (x + 1)\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}$ e S a superfície exterior de $z = y^2 + 1$ delimitada por $x = 0$, $x = 1$ e $z = 17$.

16. Determinar o fluxo do campo vetorial $\vec{f} = (2x, 2y, 2z)$, através da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com normal exterior.

17. Sejam S_1 a superfície paramétrica dada por

$\vec{r}_1(u, v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}\right)$, $u^2 + v^2 \leq 36$ e S_2 a superfície dada por

$\vec{r}_2(u, v) = \left(u, v, -\sqrt{u^2 + v^2}\right)$, $u^2 + v^2 \leq 36$.

a) Calcular o fluxo do campo vetorial $\vec{f} = (x, y, z)$ através de S_1, na direção do vetor normal unitário exterior a S_1.

b) Calcular o fluxo de $\vec{f}$ através de S_2 na direção do vetor normal unitário exterior de S_2.

c) Comentar os resultados obtidos em (a) e (b), interpretando fisicamente.

Snow666

18. Calcular $I_1 = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, dS$, onde $\vec{n}_1$ é o vetor normal unitário superior de S e

$I_2 = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}_2 \, dS$, onde $\vec{n}_2$ é o vetor normal unitário inferior de S, sendo

$\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e S a parte do plano $3x + 2y + z = 12$ cortada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ e $y = 2$.
Por que o resultado de I_2 é negativo?

19. Seja S a superfície paramétrica dada por

$\vec{r}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}\right)$, com $u^2 + v^2 \leq 36$.

a) Determinar o vetor normal $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ no ponto $P(3, 4, 5)$.

b) Calcular o fluxo através de S, do campo vetorial $\vec{f} = (x, y, -z)$, na direção do vetor $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

c) Como se explica o sinal negativo que ocorreu em (b)?

20. Calcular $I_1 = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, dS$, onde $\vec{n}_1$ é o vetor normal unitário superior de S e

$I_2 = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}_2 \, dS$, onde $\vec{n}_2$ é o vetor normal inferior de S, sendo

$\vec{f} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ e S a parte do cone $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
Por que o resultado de I_1 é positivo?

21. Seja T a região limitada pelos gráficos de $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$. Seja S a superfície de T, com normal exterior. Calcular $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$, sendo $\vec{f} = (x^3, y^3, z^3)$.

6.14 TEOREMA DE STOKES

No Capítulo V, vimos que sob certas condições, uma integral curvilínea no plano pode ser transformada em uma integral dupla, pelo Teorema de Green.

O Teorema de Stokes constitui uma generalização do Teorema de Green para o espaço tridimensional e pode ser utilizado para transformar determinadas integrais curvilíneas em integrais de superfície ou vice-versa.

Além disso, ele é de grande importância em aplicações físicas.

6.14.1 Teorema

Seja S uma superfície orientável, suave por partes, delimitada por uma curva fechada, simples, suave por partes, C. Então, se $\vec{g}$ é um campo vetorial contínuo, com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em um domínio que contém $S \cup C$, temos

$$\boxed{\iint_S \text{rot}\, \vec{g} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{r}} \quad , \tag{1}$$

onde a integração ao longo de C é efetuada no sentido positivo determinado pela orientação de S, como mostra a Figura 6.58.

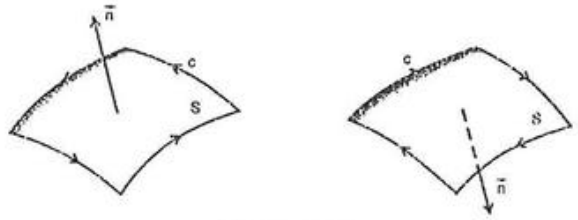


Figura 6.58

Se o campo $\vec{g}$ tem componentes g_1, g_2 e g_3, (1) pode ser reescrita como

$$\oint_C (g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) dy dz + \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dx dy \right]. \tag{2}$$

Prova Parcial. Vamos fazer a demonstração para uma superfície S parametrizada por

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \qquad (u, v) \in R,$$

supondo que as derivadas parciais de 2ª ordem de $\vec{r}$ são contínuas e R é uma região onde podemos aplicar o Teorema de Green. O vetor $\vec{n}$ considerado será o vetor

$$\vec{n} = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}.$$

Para obtermos (2), basta mostrar que

$$\oint_C g_1 dx = \iint_S \left(\frac{\partial g_1}{\partial z}\, dzdx - \frac{\partial g_1}{\partial y}\, dxdy \right), \tag{3}$$

$$\oint_C g_2 dy = \iint_S \left(-\frac{\partial g_2}{\partial z}\, dydz + \frac{\partial g_2}{\partial x}\, dxdy \right), \tag{4}$$

e

$$\oint_C g_3 dz = \iint_S \left(\frac{\partial g_3}{\partial y}\, dydz - \frac{\partial g_3}{\partial x}\, dzdx \right). \tag{5}$$

Vamos provar a equação (3).

Seja C_1 a curva que delimita a região R. Suponhamos que C_1 é orientada no sentido anti-horário e que o sentido positivo sobre C, determinado pela orientação de S, corresponde ao sentido positivo de C_1 (ver Figura 6.59).

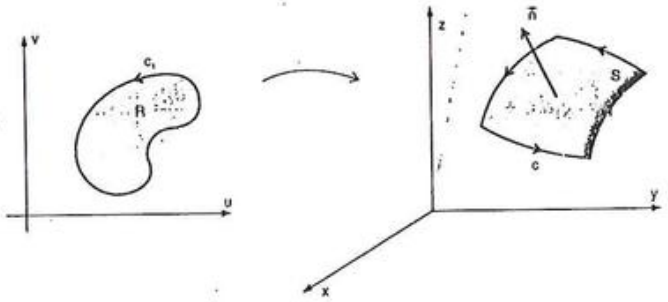


Figura 6.59

Seja $\vec{h}(t) = (u(t), v(t)), t \in [a, b]$ uma parametrização de C_1. Então,

$$\vec{r}(u(t)), v(t)), t \in [a, b]$$

é uma parametrização da curva C.

Portanto, escrevendo $u = u(t)$, $v = v(t)$, temos

$$\oint_C g_1 dx = \int_a^b g_1(\vec{r}(u, v)) \frac{dx(u, v)}{dt}\, dt.$$

Usando a regra da cadeia, vem

$$\oint_C g_1 dx = \int_a^b g_1(\vec{r}(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \left(g_1(\vec{r}(u, v))\frac{\partial x}{\partial u},\ g_1(\vec{r}(u, v))\frac{\partial x}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) dt$$

$$= \oint_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r}, \text{ onde } \vec{f} \text{ é o campo vetorial dado por}$$

$$\vec{f} = \left(g_1(\vec{r}(u, v))\frac{\partial x}{\partial u},\ g_1(\vec{r}(u, v))\frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$\oint_C g_1 dx = \iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[g_1(\vec{r}(u, v))\frac{\partial x}{\partial v} \right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[g_1(\vec{r}(u, v))\frac{\partial x}{\partial u} \right] \right\} dudv.$$

Como $\vec{r}(u, v)$ tem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas, a integral à direita existe.

Desenvolvendo as derivadas parciais do integrando com o auxílio da regra da cadeia, temos

$$\oint_C g_1 dx = \iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[g_1(\vec{r}(u, v))\frac{\partial x}{\partial v} \right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[g_1(\vec{r}(u, v))\frac{\partial x}{\partial u} \right] \right\} dudv$$

$$= \iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[g_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\frac{\partial x}{\partial v} \right] - \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[g_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}\right]\Big\} dudv$$

$$= \iint_R \left\{ g_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \right.$$

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - g_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$$

$$\left. -\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right\} dudv.$$

Aplicando o Teorema de Schwarz e agrupando convenientemente, vem

$$\int_C g_1 dx = \iint_R \left[\frac{\partial g_1}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial g_1}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] dudv$$

$$= \iint_R \left[\frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] dudv$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial g_1}{\partial z}\, dzdx - \frac{\partial g_1}{\partial y}\, dxdy\right).$$

De forma análoga, podemos provar as equações (4) e (5).

Observamos que a demonstração do Teorema de Stokes no caso geral é bastante elaborada e foge aos objetivos deste texto.

6.14.2 Exemplos

(i) Usando o Teorema de Stokes, calcular $I = \int_C \left(y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz\right)$, onde C é o contorno da parte do plano $x + y + z = a$, $a > 0$, que está no 1º octante, no sentido anti-horário.

Solução. A Figura 6.60 mostra o caminho C de integração. Como C é formado por 3 partes suaves, para obtermos a integral dada usando a Definição 5.3.3, devemos calcular três integrais curvilíneas. Pelo Teorema de Stokes, podemos transformá-la em uma única integral de superfície.

Vamos escolher uma superfície S que seja delimitada pela curva C e orientar S de forma a ser possível a aplicação do Teorema.

Como a curva dada é plana, escolhemos para S o próprio plano que contém a curva. Em nosso exemplo, o vetor $\vec{n}$ será o vetor normal superior de S (ver Figura 6.60).

Usando a equação (2), obtemos

$$I = \iint_S [-2zdydz - 2xdzdx - 2ydxdy].$$

Para calcular esta integral de superfície, vamos usar a forma explícita e aplicar a equação 6.12(5). Temos,

$$I = \iint_R \{-[(-2)(a - x - y)(-1)] - (-2x)(-1) - 2y\}\, dxdy$$

$$= -2a \iint_R dxdy, \text{ onde } R \text{ é a projeção de } S \text{ sobre o plano } xy \text{ (ver Figura 6.61).}$$

Logo, $I = -2a \cdot \frac{a^2}{2} = -a^3$.

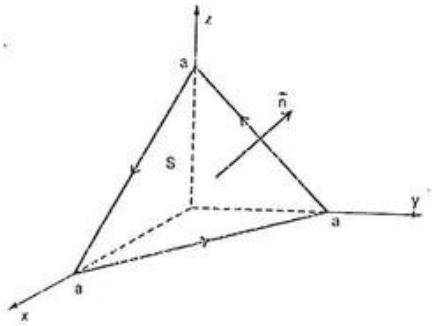


Figura 6.60

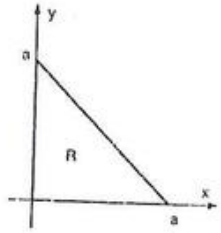


Figura 6.61

(ii) Seja S a parte do gráfico de $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ com normal exterior. Determinar

$$\iint_S \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS, \text{ sendo } \vec{g} = (3z,\ 4x,\ 2y).$$

Solução. A Figura 6.62 mostra a superfície S e a curva C que delimita S. Como a normal considerada é a normal exterior, podemos observar que a curva C deve ser orientada no sentido anti-horário.

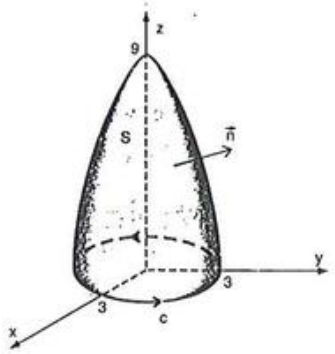


Figura 6.62

Usando a representação vetorial de C dada por
$\vec{r}(t) = (3\cos t,\ 3\text{sen } t,\ 0),\ 0 \le t \le 2\pi$, e aplicando (1), obtemos

$$\iint_S \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} (3.0,\ 4.3\cos t,\ 2.3\text{sen } t) \cdot (-3\text{sen } t, 3\cos t,\ 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 36\cos^2 t\, dt$$

$$= 36 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$$

$$= 36\pi.$$

(iii) Sejam S_1 a superfície parabólica $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$ com normal exterior e S_2 a parte do plano $z = 4$ delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com normal inferior. Mostrar que

$$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS,$$

sendo $\vec{g}$ um campo vetorial com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas.

Solução. A Figura 6.63 mostra as superfícies S_1 e S_2. Podemos observar que as duas superfícies são delimitadas pela mesma curva C e que, para aplicar o Teorema de Stokes, em ambos os casos, C deve ser orientada no sentido horário.

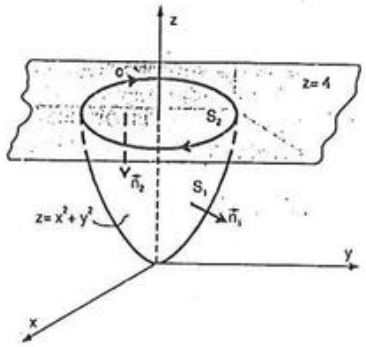


Figura 6.63

Portanto, usando a equação (1), obtemos

$$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

e

$$\iint_{S_2} \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{r},$$

concluindo, dessa forma, que

$$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Este resultado pode ser generalizado. Se $\vec{g}$ é um campo vetorial contínuo com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas, a integral de superfície do rotacional de $\vec{g}$ depende apenas da curva que delimita a superfície. Isto é, se S_1 e S_2 são delimitadas pela mesma curva C e determinam a mesma orientação em C (ver Figura 6.64), temos

$$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS.$$

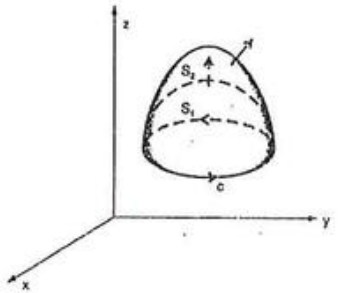


Figura 6.64

(iv) Calcular $I = \int_C (\text{sen } z\, dx - \cos x\, dy + \text{sen } z\, dz)$, onde C é o perímetro do retângulo $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, $z = 3$ no sentido horário.

Solução. A curva C, que é formada por quatro pedaços suaves, pode ser vista na Figura 6.65. Neste exemplo, a superfície S é dada na forma explícita pela equação $z = 3$ e o vetor $\vec{n}$ tem componente z negativa. A projeção de S sobre o plano xy é o retângulo $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$.

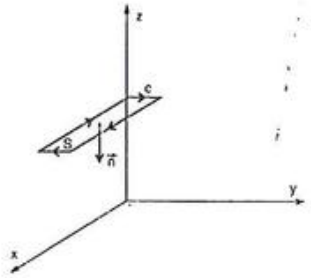


Figura 6.65

Portanto, usando (2) e a equação 6.12(5), temos

$$I = \iint_S [(0 - 0)\, dydz + (\cos z - 0)\, dzdx + (\text{sen } x - 0)\, dxdy]$$

$$= \iint_S [\cos z\, dzdx + \text{sen } x\, dxdy]$$

$$= -\iint_R (-0 \cdot 0 - \cos z \cdot 0 + \text{sen } x)\, dxdy$$

$$= -\int_0^{\pi} \int_0^{1} \text{sen } x\, dydx$$

$$= -2.$$

(v) Uma interpretação física do rotacional.

Se $\vec{v}$ é um campo de velocidades de um fluido em movimento, usando o Teorema de Stokes, podemos obter uma interpretação física para o rotacional de $\vec{v}$.

Dado um ponto P no domínio de $\vec{v}$, sejam S_r a superfície de um disco de raio r, centrado em P e C_r a circunferência que delimita este disco. Escolhemos um vetor unitário, normal a S_r e determinamos a correspondente orientação de C_r (ver Figura 6.66). Então, supondo que $\vec{v}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, temos

$$\oint_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_r} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS. \qquad (6)$$

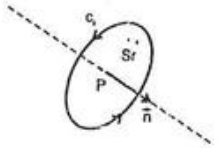


Figura 6.66

Conforme vimos em 5.3.5 (ii), a integral curvilínea $\oint_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ nos dá a circulação de $\vec{v}$ ao redor de C_r, a qual representa a tendência do fluido em girar em torno de C_r.

Para r suficientemente pequeno, podemos dizer que $\oint_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ descreve o comportamento do fluido nas proximidades de P, fornecendo uma medida da tendência do fluido em girar em torno do eixo determinado por $\vec{n}$. Por outro lado, nos pontos de S_r, podemos aproximar rot $\vec{v} \cdot \vec{n}$ pelo valor constante rot $\vec{v}(P) \cdot \vec{n}$. Então, se representarmos por A_r a área do disco S_r, a integral do segundo membro de (6) é aproximadamente dada por

$$\iint_{S_r} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS \cong A_r[\text{rot } \vec{v}(P) \cdot \vec{n}].$$

Substituindo este valor em (6), obtemos

$$\oint_{C_r} \vec{v} \cdot d\vec{r} \cong A_r[\text{rot } \vec{v}(P) \cdot \vec{n}]. \tag{7}$$

A expressão (7) nos diz que a circulação em torno de C_r será maior quando o vetor $\vec{n}$ tiver a mesma direção do vetor rot $\vec{v}$ (P). Podemos então dizer que rot $\vec{v}$ (P) determina o eixo em torno do qual a circulação é máxima nas proximidades do ponto P. Em Dinâmica dos Fluidos, o vetor rot $\vec{v}$ é chamado vórtice do escoamento.

Usando a equação (7), também podemos dar uma definição alternativa do rotacional de um campo vetorial $\vec{f}$, como segue:

$$\text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \vec{f} \cdot d\vec{r}. \tag{8}$$

A equação (8) define a componente de rot $\vec{f}$ na direção de um vetor $\vec{n}$ perpendicular ao disco S_r. Se tomamos, sucessivamente, o disco S_r contido em cada um dos planos coordenados, com uma orientação conveniente, obtemos as componentes do rot $\vec{f}$ nas direções $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, isto é, obtemos as componentes cartesianas de rot $\vec{f}$.

Fisicamente, esta definição nos diz que a componente de rot $\vec{f}$ em uma dada direção $\vec{n}$ é a densidade de circulação (circulação por unidade de área) de $\vec{f}$ em torno de $\vec{n}$.

6.15 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

O teorema da divergência expressa uma relação entre uma integral tripla sobre um sólido e uma integral de superfície sobre a fronteira desse sólido.

Este teorema também é conhecido como Teorema de Gauss e é de grande importância em aplicações físicas.

6.15.1 Teorema

Seja T um sólido no espaço, limitado por uma superfície orientável S. Se $\vec{n}$ é a normal unitária exterior a S e se $\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$ é uma função vetorial contínua que possui derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em um domínio que contém T, então

$$\boxed{\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_T \text{div}\, \vec{f}\, dV} \tag{1}$$

ou

$$\iint_S [f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy] = \iiint_T \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right] dxdydz. \tag{2}$$

Prova Parcial. Para mostrar (2), basta mostrar as três equações:

$$\iint_S f_1 dydz = \iiint_T \frac{\partial f_1}{\partial x} dxdydz \tag{3}$$

$$\iint_S f_2 dzdx = \iiint_T \frac{\partial f_2}{\partial y} dxdydz \tag{4}$$

$$\iint_S f_3 dxdy = \iiint_T \frac{\partial f_3}{\partial z} dxdydz. \tag{5}$$

Vamos provar a equação (5).

Suponhamos que o sólido T é um conjunto de pontos (x, y, z) que satisfazem a relação $g(x, y) \le z \le f(x, y)$, para $(x, y) \in R$, onde R é a projeção de T sobre o plano xy, limitada por uma curva suave fechada simples C.

As funções f e g são contínuas em R com $g(x, y) \le f(x, y)$ para cada ponto $(x, y) \in R$ (ver Figura 6.67).

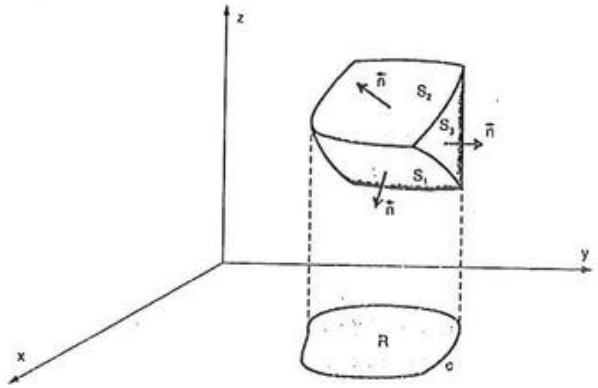


Figura 6.67

Então a superfície S é composta por três partes:

$$S_1: z = g(x, y), (x, y) \in R$$

$$S_2: z = f(x, y), (x, y) \in R$$

$$S_3: g(x, y) \le z \le f(x, y), (x, y) \in C.$$

Podemos dizer que S_1 é a "base" do sólido, S_2 é a "tampa" e S_3, a "parte lateral". Pode ocorrer que S_3 degenere em uma curva, por exemplo, se S é uma esfera.

Analisando a integral tripla de (5), temos

$$\iiint_T \frac{\partial f_3}{\partial z}\,dxdydz = \iint_R \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}\,dz\right] dxdy$$

$$= \iint_R f_3(x, y, z)\Big|_{g(x,y)}^{f(x,y)}\,dxdy$$

$$= \iint_R [f_3(x, y, f(x, y)) - f_3(x, y, g(x, y))]\,dxdy. \qquad (6)$$

Analisando a integral de superfície de (5), temos

$$\iint_S f_3 dxdy = \iint_{S_1} f_3 dxdy + \iint_{S_2} f_3 dxdy + \iint_{S_3} f_3 dxdy.$$

A integral $\iint_{S_3} f_3 dxdy$ é nula pois sobre S_3 a normal $\vec{n}$ é paralela ao plano xy e o campo vetorial $(0, 0, f_3)$ é perpendicular a $\vec{n}$ (ver 6.12.6, Exemplo vi(a)).

Logo,

$$\iint_S f_3 dxdy = \iint_{S_1} f_3 dxdy + \iint_{S_2} f_3 dxdy.$$

Sobre S_2 a normal $\vec{n}$ tem a componente z positiva e sobre S_1 a normal $\vec{n}$ tem a componente z negativa. Usando 6.12 (5), temos

$$\iint_S f_3 dxdy = -\iint_R f_3(x, y, g(x, y))dxdy + \iint_R f_3(x, y, f(x, y))\,dxdy$$

$$= \iint_R [f_3(x, y, f(x, y)) - f_3(x, y, g(x, y))]\,dxdy. \qquad (7)$$

De (6) e (7) vem

$$\iint_S f_3 dxdy = \iiint_T \frac{\partial f_3}{\partial z} dxdydz,$$

que é o resultado que queríamos mostrar.

Analogamente, supondo que T é projetado sobre o plano yz, mostramos a equação (3) e supondo que T é projetado sobre o plano xz, mostramos (4).

Concluímos a demonstração para o caso em que o sólido T pode ser projetado sobre os planos coordenados.

Se T não satisfaz as nossas hipóteses, mas em particular pode ser dividido em um número finito de sólidos do tipo descrito, então o teorema também pode ser facilmente verificado. Basta obter os resultados sobre cada parte e depois somá-los.

Para o caso mais geral, a demonstração foge aos objetivos deste texto.

6.15.2 Exemplos

(i) Calcular $I = \iint_S [(2x - z)dydz + x^2dzdx - xz^2dxdy]$, onde S é a superfície exterior do cubo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.

Solução. A Figura 6.68 mostra o sólido T limitado pela superfície S dada.

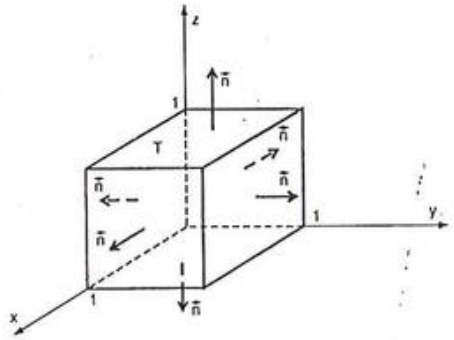


Figura 6.68

Como S é formada por 6 partes suaves, para obtermos I usando a definição, devemos calcular 6 integrais de superfície. Pelo Teorema da Divergência, podemos transformá-la em uma única integral tripla.

Seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior a S.

Como $\vec{f} = (2x - z)\vec{i} + x^2\vec{j} - xz^2\vec{k}$ é uma função vetorial contínua que possui derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^3$, temos

$$\iint_S [(2x - z)\,dydz + x^2dzdx - xz^2dxdy] =$$

$$= \iiint_T [2 + 0 - 2xz]\,dxdydz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2 - 2xz)\,dxdydz$$

$$= \frac{3}{2}$$

(ii) Calcular a integral do exemplo anterior sobre S', onde S' é a superfície exterior do cubo exceto a face que está no plano $z = 1$.

Solução. Para resolver este exemplo vamos utilizar o resultado já obtido no exemplo anterior.

Temos,

$$I = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS + \ldots + \iint_{S_6} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS = \frac{3}{2},$$

onde $S_1, S_2, \ldots, S_6$ são as faces do cubo.

Queremos calcular $I_1 = I - \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS$, onde S_1 é a face que está no plano $z = 1$.

Logo,

$$I_1 = \frac{3}{2} - \iint_{S_1} [(2x - z)dydz + x^2dzdx - xz^2dxdy]$$

$$= \frac{3}{2} - \iint_R [-(2x - 1) \cdot 0 - x^2 \cdot 0 - x \cdot 1^2]\,dxdy$$

$$= \frac{3}{2} + \int_0^1 \int_0^1 x\,dxdy$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

(iii) Usando o Teorema da Divergência, dar uma definição alternativa para a divergência de uma campo vetorial.

Solução. Seja $\vec{f}(x, y, z)$ um campo vetorial contínuo que possui derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em uma região esférica T. Existe um ponto $A(u, v, w)$ no interior de T, tal que

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{f}(x, y, z)dV = \operatorname{div}\vec{f}(u, v, w) \cdot V, \tag{8}$$

onde V é o volume de T. Este resultado decorre do Teorema do Valor Médio para integrais triplas.

Pelo Teorema da Divergência, vem

$$\operatorname{div}\vec{f}(u, v, w) = \frac{\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS}{V}, \tag{9}$$

onde S é a superfície exterior de T. A razão à direita de (9) é interpretada como o fluxo do campo vetorial $\vec{f}$ através de S, por unidade de volume, sobre a esfera T (ver 6.12.5).

Seja P um ponto arbitrário. Suponhamos que $\vec{f}$ seja contínua em um domínio contendo P em seu interior. Seja S_r a superfície de uma esfera de raio r e centro P. Então, para cada r, existe um ponto P_r dentro de S_r, tal que

$$\operatorname{div}\vec{f}(P_r) = \frac{\iint_{S_r} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS}{V_r}, \text{ onde } V_r \text{ é o volume da esfera (ver Figura 6.69).}$$

Fazendo $r \to 0$, $P_r \to P$, e então, podemos escrever,

$$\operatorname{div}\vec{f}(P) = \lim_{r\to 0} \frac{\iint_{S_r} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS}{V_r}, \tag{10}$$

isto é, a divergência de $\vec{f}$ em P é o valor limite do fluxo por unidade de volume, sobre uma esfera de centro em P, quando o raio dessa esfera tende para zero.

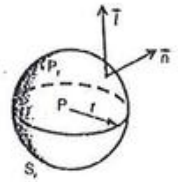


Figura 6.69

6.16 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 9, usar o Teorema de Stokes para determinar a integral de linha dada:

1. $\oint_C (y^2dx + x^2dz)$, onde C é o contorno da parte do plano $2x + y + z = 4$ que está no 1º octante, no sentido anti-horário.

2. $\oint_C [(y + 2z)dx + (2z + x)dy + (x + y)dz]$, onde C é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $x = \frac{a}{2}$. Considerar os dois sentidos de percurso.

3. $\oint_C (xdx + ydy + z^2dz)$, onde C é o perímetro do retângulo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$, $z = 4$, no sentido anti-horário.

4. $\oint_C \left(e^{x^2}dx + (x + z)dy + (2x - z)dz\right)$, onde C é o contorno da parte do plano $x + 2y + z = 4$ que está no 1º octante, no sentido anti-horário.

5. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = (y^3\cos xz, 2x^2 + z^2, y(x - z))$ e C é o retângulo $0 \le x \le 4$, $0 \le z \le 1$, no plano $y = 2$. Considerar os dois sentidos do percurso.

6. $\oint_C [ydx + (x + y + 2z)dy + (x + 2y)dz]$, onde C é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = y$, orientada no sentido anti-horário.

7. $\oint_C [(y - x)dx + (x - z)dy + (x - y)dz]$, onde C é o retângulo de vértices (0, 0, 5), (0, 2, 5), (–1, 0, 5) e (–1, 2, 5), no sentido horário.

8. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{f} = \left(e^{x^2} + 2y,\ e^{y^2} + x,\ e^{z^2}\right)$ e C a elipse $x = \cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = 2$, $0 \le t \le 2\pi$.

9. $\oint_C \left[(x^2 + 2y^3)dx + xy^2dy + \sqrt[3]{z^2 + 1}\, dz\right]$, sendo C a circunferência $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $z = 2$, $0 \le t \le 2\pi$.

10. Seja S a parte do gráfico $z = 16 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$ com normal exterior. Determinar $\iint_S \operatorname{rot} \vec{g} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{g} = (2y, y + z, z)$.

11. Calcular $\iint_S \operatorname{rot} \vec{g} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{g} = (xy^2, x, z^3)$ e S qualquer superfície suave delimitada pela curva $\vec{r}(t) = (2\cos t, 3 \operatorname{sen} t, 1)$, $0 \le t \le 2\pi$, com a normal apontando para cima.

Nos exercícios de 12 a 19 usar o Teorema da Divergência para calcular a integral da superfície dada.

12. $\iint_S \left[x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy\right]$, sendo S a superfície exterior do tetraedro delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.

13. $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{f} = (x^2y,\ 2xz,\ z^2)$ e S a superfície exterior do paralelepípedo retângulo delimitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

14. $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{f} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}$ e S a superfície exterior do sólido delimitado pelos parabolóides $z = x^2 + y^2 - 9$ e $z = -2x^2 - 2y^2 + 9$.

15. $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{f} = (2x,\ 2y,\ 0)$ e S a superfície do exercício 13, exceto a face superior.

16. $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{f} = (0,\ 0,\ 2z)$ e S a superfície do exercício 13, exceto a face superior.

17. $\iint_S [x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy]$ sendo S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ abaixo do plano $z = \frac{1}{2}$, com normal exterior.

18. Calcular $I = \iint_S \left[(4x - y)dydz + y^2dzdx - xy\, dxdy\right]$, onde S é a superfície exterior do cubo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 2$, $y = 2$ e $z = 2$.

19. $\iint_S (2dydz + 3dzdx - 5dxdy)$, onde S é a superfície do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$.

20. Usar o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo vetorial $\vec{f}$, através da superfície do sólido T, sendo:

a) $\vec{f} = -y\vec{j} + z\vec{k}$, e T o cilindro $x^2 + y^2 \le 16$, $-2 \le z \le 2$.

b) $\vec{f} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ e T o cone $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \le 4$.

c) $\vec{f} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ e T a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.

21. Verificar o Teorema de Stokes para $\vec{g} = 4y\vec{i} - xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$, onde S é a superfície do parabolóide $2z = x^2 + y^2$ limitado por $z = 8$ e C é o seu contorno percorrido no sentido anti-horário.

22. Verificar o Teorema da Divergência para $\vec{f} = (2xy + z)\vec{i} + y^2\vec{j} - (x + 3y)\vec{k}$ tomado no sólido limitado por $x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

Snow666

TABELAS

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
4. $\operatorname{sen}^2 x = 1/2\,(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = 1/2\,(1 + \cos 2x)$
6. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
7. $\operatorname{sen} x \cos y = 1/2\,[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)]$
8. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 1/2\,[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
9. $\cos x \cos y = 1/2\,[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

TABELAS DE DERIVADAS

Nesta tabela, u e v são funções deriváveis de x, e c, α e a são constantes.

1. $y = c \Rightarrow y' = 0$
2. $y = x \Rightarrow y' = 1$
3. $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$
4. $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$
5. $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$
6. $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
7. $y = u^\alpha, (\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$
8. $y = a^u, (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
9. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$
10. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$

11. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

12. $y = u^v \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v' \ (u > 0)$

13. $y = \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$

14. $y = \cos u \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$

15. $y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$

16. $y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$

17. $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$

18. $y = \operatorname{cosec} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot u'$

19. $y = \operatorname{arc\,sen} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

20. $y = \operatorname{arc\,cos} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

21. $y = \operatorname{arc\,tg} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

22. $y = \operatorname{arc\,cotg} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

23. $y = \operatorname{arc\,sec} u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$

24. $y = \operatorname{arc\,cosec} u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$

25. $y = \operatorname{senh} u \Rightarrow y' = \cosh u \cdot u'$

26. $y = \cosh u \Rightarrow y' = \operatorname{senh} u \cdot u'$

27. $y = \operatorname{tgh} u \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'$

28. $y = \operatorname{cotgh} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u'$

29. $y = \operatorname{sech} u \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \cdot u'$

30. $y = \operatorname{cosech} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{cotgh} u \cdot u'$

31. $y = \operatorname{arg\,senh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

32. $y = \operatorname{arg\,cosh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}, u > 1$

33. $y = \operatorname{arg\,tgh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2}, |u| < 1$

34. $y = \operatorname{arg\,cotgh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2}, |u| > 1$

35. $y = \operatorname{arg\,sech} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}, 0 < u < 1$

36. $y = \operatorname{arg\,cosech} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}, u \neq 0$

TABELAS DE INTEGRAIS

1. $\int du = u + C$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

3. $\int u^\alpha \, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \text{ é constante} \neq -1)$

4. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u \, du = e^u + C$

6. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int tg\, u \, du = \ln|\sec u| + C$

9. $\int \operatorname{cotg}\, u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

10. $\int \operatorname{cosec}\, u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg}\, u| + C$

11. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

12. $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C$

13. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg}\, u + C$

14. $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$

15. $\int \operatorname{cosec}\, u \cdot \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \left|\frac{u}{a}\right| + C$

19. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$

20. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$

21. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$

22. $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh}\, u + C$

23. $\int \operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

24. $\int \operatorname{cosech}\, u \cdot \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech}\, u + C$

25. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

26. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

27. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}}{u}\right| + C$

FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA

1. $\int \text{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} u\,du$

2. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \,\text{sen}\, u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

3. $\int \text{tg}^n u\,du = \frac{1}{n-1}\text{tg}^{n-1} u - \int \text{tg}^{n-2} u\,du$

4. $\int \text{cotg}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\text{cotg}^{n-1} u - \int \text{cotg}^{n-2} u\,du$

5. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \,\text{tg}\, u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

6. $\int \text{cosec}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\text{cosec}^{n-2} u \,\text{cotg}\, u + \frac{n-2}{n-1}\int \text{cosec}^{n-2} u\,du$

7. $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{u(u^2+a^2)^{1-n}}{2a^2(n-1)} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}$

MAKRON Books

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Observamos que muitos dos exercícios podem apresentar respostas diferentes das listadas aqui. Isso ocorrerá principalmente nos exercícios que envolvem parametrizações de curvas e superfícies.

CAPÍTULO 1

SEÇÃO 1.8

1. a) $\vec{f}(t) = e^t\vec{i} + te^t\vec{j}$ b) $(1, 0); (e^2, 2e^2)$

2. $\vec{r}(0) = \vec{0}$; $\vec{r}(\pi) = \frac{2}{m}\vec{i} + \left(2\pi + \frac{\pi}{m}\right)\vec{j}$

5. a) $2(t^2 + t)\vec{i} + (t - t^2 + \text{sen}t)\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

   b) $t^2 + 2t^3 + (t - t^2)\text{sen}t$, $0 \le t \le 2\pi$

   c) $t\cos t\,(1 - t)\vec{i} - t\cos t\,(1 + 2t)\vec{j} + (t^3 - t^2 + 2t^2\,\text{sen}\,t + t\,\text{sen}\,t)\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

   d) $t^2 + 4t - \text{sen}t$, $0 \le t \le 2\pi$

   e) $(2t^2 - 2t + 2)\vec{i} + (-t^2 + 3t - 2 + \text{sen}(t + 1))\vec{j} + \cos(t + 1)\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

7. a) $(0, -1/2, 1), (1, -1, 1)$

   c) A partícula tende para uma posição infinita.

8. a) $3\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $-\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$ c) $2\vec{i} + \frac{11}{2}\vec{j} + \frac{21}{2}\vec{k}$ d) -5

e) $-9\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$ f) $2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ g) $\vec{0}$

9. a) $\vec{j} + 2\vec{k}$ b) $\nexists$

10. a) $-\vec{i} + \pi^2\vec{j} - 5\vec{k}$ b) $\vec{j}$ (c) $4\vec{i} + \vec{j}$ d) $\frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{k}$ e) $\ln 2\,\vec{i}$

13. a) $-\vec{i}$, é contínua em $t = 0$; $\nexists$, não é contínua em $t = 3$

b) $\vec{j}$, é contínua em $t = 0$

c) $\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{j}$, não é contínua em $t = 0$

d) $-\vec{j} + \vec{k}$, é contínua em $t = 0$

e) $\nexists$, não é contínua em $t = 1$

$\nexists$, não é contínua em $t = 2$

14. a) $[0, 2\pi]$ b) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ c) $(0, +\infty)$ d) $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

e) $\bigcup_{n\in z}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi,\ \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right)$ f) $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$

g) $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

h) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

SEÇÃO 1.10

1. a) $-3\cos^2 t \operatorname{sen} t\,\vec{i} + \sec^2 t\,\vec{j} + 2\operatorname{sen} t \cos t\,\vec{k}$ b) $(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j}$

c) $-\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \frac{1}{t^2}\vec{k}$ d) $-e^{-t}\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j}$ e) $\frac{1}{t}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

f) $\frac{9}{(2t+1)^2}\vec{i} - \frac{2t}{1-t^2}\vec{j}$

2. a) $(1, -2, 3)$ b) $(1, e)$ c) $(0, -1, 1)$

d) $(-1, 1)$ e) $(2, 1, 0)$

3. $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

4. a) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ b) $\pm(-1, 0, 0)$

c) $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d) $\pm\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+8}}, \frac{-2}{\sqrt{\pi^2+8}}, \frac{-2}{\sqrt{\pi^2+8}}\right)$

5. a) $\vec{v}(t) = -2\operatorname{sen} t\,\vec{i} + 5\cos t\,\vec{j}$ $\vec{a}(t) = -2\cos t\,\vec{i} - 5\operatorname{sen} t\,\vec{j}$

$\left|\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{\frac{29}{2}}$ $\left|\vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{\frac{29}{2}}$

b) $\vec{v}(t) = e^t\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j}$ $\vec{a}(t) = e^t\vec{i} + 4e^{-2t}\vec{j}$

$|\vec{v}(\ln 2)| = \frac{\sqrt{17}}{2}$ $|\vec{a}(\ln 2)| = \sqrt{5}$

c) $\vec{v}(t) = \operatorname{senh} t\,\vec{i} + 3\cosh t\,\vec{j}$ $\vec{a}(t) = \cosh t\,\vec{i} + 3\operatorname{senh} t\,\vec{j}$

$|\vec{v}(0)| = 3$ $|\vec{a}(0)| = 1$

6. a) $\frac{1}{2}(t-1)\vec{i} + \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1)\vec{j}$ b) $\vec{v}(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(t-1)\right)$ $\vec{a}(t) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

c) $\vec{v}(5) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ $\vec{a}(5) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

7. a) $t^2\vec{i} + 2\sqrt{t}\,\vec{j} + 4\sqrt{t^3}\,\vec{k}$ b) $(2, 1, 6)$

c) $(16, 4, 32)$ $\left(8, \frac{1}{2}, 12\right)$ $\left(2, \frac{-1}{16}, \frac{3}{2}\right)$

8. a) $\vec{v}(t) = \vec{i} - 2t\vec{k}$ $\vec{a}(t) = -2\vec{k}$ $\vec{v}(0) = \vec{i}$

$\vec{a}(0) = -2\vec{k}$ $\vec{v}(2) = \vec{i} - 4\vec{k}$ $\vec{a}(2) = -2\vec{k}$

b) $\vec{v}(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2}\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{a}(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}\vec{i}$ $\vec{v}(1) = \left(-\dfrac{1}{4}, 1\right)$

$\vec{v}(2) = \left(-\dfrac{1}{9}, 1\right)$ $\vec{a}(1) = \left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ $\vec{a}(2) = \left(\dfrac{2}{27}, 0\right)$

c) $\vec{v}(t) = 2t\vec{j} + 6t^5\vec{k}$ $\vec{a}(t) = 2\vec{j} + 30t^4\vec{k}$

$\vec{v}(0) = \vec{0}$ $\vec{v}(1) = 2\vec{j} + 6\vec{k}$ $\vec{a}(0) = 2\vec{j}$ $\vec{a}(1) = 2\vec{j} + 30\vec{k}$

d) $\vec{v}(t) = -\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{a}(t) = \vec{0}$ $\vec{v}(1) = \vec{v}(2) = -\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{a}(1) = \vec{a}(2) = \vec{0}$

9. a) $\vec{b}$ b) $2t\vec{a} + \vec{b}$

15. a) $(-2t - 4t^3)\vec{i}$ b) 0 c) $\vec{0}$ d) $4t^3 + 2t$

16. $\dfrac{-1}{(t-1)^2}\vec{i} + \dfrac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}\vec{j}$

CAPÍTULO 2

SEÇÃO 2.9

1. a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $x^2 + y^2 = 16; z = 2$

c) $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$ d) $y = x^2 - 2x + 5; z = 2$

2. a) $y = 6x + 5$ b) $y = x^2 + 1$ c) $y = x + 2; z = 2$ $x \geq -1$

3. a) $(1, -5/2); \dfrac{\sqrt{41}}{2}; \left(1 + \dfrac{\sqrt{41}}{2}\cos t, \dfrac{-5}{2} + \dfrac{\sqrt{41}}{2}\operatorname{sen} t\right)$

b) $(3, -4); 5; (3 + 5\cos t, -4 + 5\operatorname{sen} t)$

c) $(0, -5/2); \dfrac{\sqrt{33}}{2}; \left(\dfrac{\sqrt{33}}{2}\cos t, \dfrac{-5}{2} + \dfrac{\sqrt{33}}{2}\operatorname{sen} t\right)$

4. a) é uma circunferência de centro $(-5/4, -1/2)$ e raio $\dfrac{\sqrt{53}}{4}$

$x = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{\sqrt{53}}{4}\cos t;\ y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{53}}{4}\operatorname{sen} t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$

b) uma elipse: $x = \dfrac{3}{2} + \sqrt{\dfrac{7}{20}}\cos t;\ y = \dfrac{1}{5} + \sqrt{\dfrac{7}{50}}\operatorname{sen} t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$

c) uma elipse: $x = 2 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t;\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\operatorname{sen} t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$

d) uma parábola: $x = t;\ y = \dfrac{t^2 + 4}{8}$

e) uma hipérbole: $x = t;\ y = \dfrac{1}{t-1};\ t > 1$

5. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1;\ x \geq 3$

6. a) $(1 + 2t)\vec{i} + \left(\dfrac{1}{2} - t\right)\vec{j} + 2\vec{k}$ b) $5t\vec{i} + (2 - t)\vec{j}$

c) $(-1 + 5t)\vec{i} + (2 - 2t)\vec{j} + 5t\vec{k}$ d) $\left(\sqrt{2} + 5t\right)\vec{i} + 2\vec{j} + \left(\sqrt{3} - 3t\right)\vec{k}$

7. a) $(2 - 5t)\vec{i} + 4t\vec{j} + (1 - t)\vec{k}$

b) $(5 - 5t)\vec{i} + (-1 + t)\vec{j} + (-2 + 4t)\vec{k}$

c) $\left(\sqrt{2} - (7 + \sqrt{2})t\right)\vec{i} + (1 + t)\vec{j} + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{26}{3}t\right)\vec{k}$

d) $\pi\vec{i} + \left(\dfrac{\pi}{2} - \left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)t\right)\vec{j} + (3 - t)\vec{k}$

Snow666

8. a) $t\vec{i} + (5t - 1)\vec{j} + 2\vec{k}$

b) $t\vec{i} + \frac{22t - 9}{33}\vec{j} + \frac{11t - 3}{33}\vec{k}$

c) $t\vec{i} + (4 + t)\vec{j} + (3t + 24)\vec{k}$

9. a) $(2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 4);\ t \in [0,\ 2\pi]$ b) $(t,\ 2t^2,\ t^3)$

c) $\left(-1 + \sqrt{5}\cos t,\ \sqrt{10}\operatorname{sen} t,\ 2\right);\ t \in [0,\ 2\pi]$

d) $\left(t,\ t^{1/2},\ 2\right);\ t \geq 0$ e) $(t, \ln t,\ e^t);\ t > 0$

f) $(t,\ t,\ 2t^2)$ g) $(2-3t,\ 1,\ 2+t);\ t \in [0,\ 1]$

h) $(2 + 2\cos t,\ 2 + 2\operatorname{sen} t,\ 0);\ 0 \leq t \leq 2\pi$

i) $(2 + 2\cos t,\ 2 - 2\operatorname{sen} t,\ 0);\ 0 \leq t \leq 2\pi$ j) $(t,\ 0,\ 1-t);\ t \in [0,\ 1]$

k) $(t^2,\ t,\ 0);\ t \in [-1,\ 1]$ l) $(1-2t,\ -2+2t,\ 3-4t);\ t \in [0,\ 1]$

m) $(t,\ t^3 - 7t^2 + 3t - 2,\ 0);\ 0 \leq t \leq 3$ n) $(t,\ 2t - 1,\ -3t + 2)$

o) $(\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 2\cos t - 2\operatorname{sen} t);\ 0 \leq t \leq 2\pi$

p) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right);\ 0 \leq t \leq 2\pi$

q) $(3 + t,\ 3 + 2t,\ -2);\ t \in [0,\ 1]$.

10. a) $(2 + 3\cos t,\ 1 - 4\operatorname{sen} t);\ t \in [0,\ 2\pi]$ b) $(1 - t,\ 3 - t,\ 3 - 2t);\ t \in [0,\ 1]$

c) $(5 - 2t,\ 7 - 2t,\ -2 + 2t);\ t \in [1,\ 2]$ d) $(-t,\ t^2);\ t \in [-1,\ 2]$

e) $(2\pi - t + \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t);\ t \in [0,\ 2\pi]$

f) $(1 + \cos t,\ 1 - \operatorname{sen} t,\ 8\pi - 2t);\ t \in [0,\ 4\pi]$

g) $\left(2\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right),\ 2\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right);\ t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

11. a) $\vec{i} + 2w\vec{j};\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}w\right)\vec{i} + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,w\right)\vec{j}$

b) $(1 + w)\vec{i} + 2\vec{j} + (3 - 2w)\vec{k}$

c) $\left(1 + \sqrt{3}\,w\right)\vec{i} + \left(-\sqrt{3} + w\right)\vec{j} + \left(\frac{-4\pi}{3} + 4w\right)\vec{k}$

d) $(4 - 4w)\vec{i} + (-8 + 12w)\vec{j}$

e) $-w\vec{i} + \vec{j} + \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi w\right)\vec{k}$

f) $\left(1 - \sqrt{3}\,w\right)\vec{i} + \left(\sqrt{3} + w\right)\vec{j} + (\pi + 3w)\vec{k}$

g) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}w\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}w\right)\vec{j} + (4 + 4w)\vec{k}$

h) $(1 + 3w)\vec{i} + (1 - 3w)\vec{j} + 3\sqrt{2}\,w\vec{k}$

i) $(1 + w)\vec{i} + (1 + 3w)\vec{j} + (1 + 4w)\vec{k}$

12. $(w, -4w)$

13. $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\right)$; $\vec{B}$

14. $(a\cos t - aw\operatorname{sen} t)\vec{i} + (a\operatorname{sen} t + aw\cos t)\vec{j} + (bt + bw)\vec{k}$

15. (3, 5, 6) e (0, 2, 3)

17. a) não é suave b) é suave c) não é suave

d) é suave e) é suave

SEÇÃO 2.17

1. a) $\sqrt{3}\,(e - 1)$ b) 60 c) $2\sqrt{2}\pi$

d) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$ e) $\frac{1}{27}\left(85\sqrt{85} - 13\sqrt{13}\right)$

f) $\sqrt{5}\pi$ g) 16 h) 2π

i) $\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)$ j) $2\sqrt{10}$ k) $e - \frac{1}{e}$

2. a) $s(t) = \frac{\sqrt{17}}{2}t$ b) $s(t) = 2t$

c) $s(t) = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2t + \sqrt{1+4t^2}\right|\right)$

d) $s(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}^2 t$ e) $s(t) = 2t,\ t \in [0, \pi]$

f) $s(t) = \frac{3a\operatorname{sen}^2 t}{2};\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3. a) $\left(\sqrt{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\ s \in [0, 2\sqrt{2}\pi]$

b) $\left(\frac{3s}{\sqrt{10}} - 1, \frac{s}{\sqrt{10}} + 2\right)$ c) $\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

d) $\left(2(-1+\sqrt{1+s}), \frac{2}{3}\sqrt{8}\left(-1+\sqrt{1+s}\right)^{3/2}, \left(-1+\sqrt{1+s}\right)^2\right);\ s \in [0, 15]$

e) $\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right), \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right), \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

f) $(\cos s, \operatorname{sen} s),\ s \in [0, 2\pi]$

g) $\left(a\left(1 - \frac{2s}{3a}\right)^{3/2}, a\left(\frac{2s}{3a}\right)^{3/2}\right),\ 0 \le s \le \frac{3a}{2}$

h) $\left(2\cos\frac{s}{2\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}}, 2\operatorname{sen}\frac{s}{2\sqrt{5}}\right),\ 0 \le s \le \sqrt{5}\pi$

i) $\left(1 - \frac{s}{\sqrt{14}}, 2 + \frac{2s}{\sqrt{14}}, \frac{3s}{\sqrt{14}}\right),\ 0 \le s \le \sqrt{14}$

4. a) Sim b) Sim c) Não d) Sim e) Não
f) Sim g) Não h) Sim

5. a) $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\pi^2}}, \frac{-\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}\right)$ b) $\left(\frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

c) $\left(\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$ d) $(-1, 0, 0)$ e) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ g) $\left(\frac{\sqrt{2}}{14}, \frac{2\sqrt{2}}{7}, \frac{9\sqrt{2}}{14}\right)$

h) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. $\frac{1}{4}$

9. a) $\frac{16}{17\sqrt{17}}$ b) 0 c) $\frac{108}{82\sqrt{82}}$ d) $\frac{22}{37\sqrt{37}}$

e) 2; $\frac{2}{5\sqrt{5}}$; $\frac{2}{37\sqrt{37}}$ f) $\frac{24}{125}$ g) $\frac{1}{4}$ h) $\frac{1}{2}$

10. a) $\frac{2}{\sqrt{1+16t^2}^3}$ b) $\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}^3}$

12. a) O círculo de curvatura tem raio $\sqrt{2}$ e está centrado na semi-reta cuja origem é $(2, 0, 2)$ e tem direção $-\vec{i} - \vec{k}$.

b) O círculo de curvatura tem raio 6 e está centrado na semi-reta de origem em $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\pi\right)$ e direção $-\frac{1}{12}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{12}\vec{j}$.

c) O círculo de curvatura tem raio 1 e está centrado em $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

d) O círculo de curvatura tem raio $\frac{1}{4}$ e está centrado em $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

13. a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ c) $\vec{B}$

16. a) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ b) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $(0, -1, 0)$

17. $-2y + z = 0$; $-2y + z = 8\pi - 4$; $2x + z = 2\pi$

Snow666

18. a) $\vec{k}$; $\vec{k}$ b) $\vec{k}$ c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$

d) $-\vec{j}$ e) $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$

19. a) 0 b) 0 c) $\frac{1}{5}$ d) 0 e) $\frac{2}{5}$

20. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $-\frac{5}{34}$

21. a) $\left(-\text{sen}\ \frac{t}{2},\ \cos\frac{t}{2}\right)$ c) 2

22. a) $(2t, 3t^2, 0)$ e $(2, 6t, 0)$

b) $t\sqrt{4 + 9t^2}$ c) $\frac{4 + 18t^2}{\sqrt{4 + 9t^2}}$; $\frac{6t}{\sqrt{4 + 9t^2}}$

23. a) $16t\,(25 + 16t^2)^{-1/2}$; $\frac{20}{\sqrt{25 + 16t^2}}$

b) $\sqrt{3}\,e^t$; $\sqrt{2}\,e^t$ c) 0; 1

d) $\frac{10t}{\sqrt{4 + 5t^2}}$; $\sqrt{\frac{80}{4 + 5t^2}}$ e) $\frac{18t^3}{\sqrt{10 + 9t^4}}$; $\frac{6\sqrt{10}\,t}{\sqrt{10 + 9t^4}}$

25. $\frac{32t}{\sqrt{1 + 16t^2}}$; $\frac{8}{\sqrt{1 + 16t^2}}$

CAPÍTULO 3

SEÇÃO 3.11

2. a) bola aberta de centro (0, 1) e raio $\sqrt{3}$

b) bola fechada de centro (1, 1, 1) e raio $\sqrt{3}$

c) não é uma bola d) não é uma bola

e) bola aberta de centro (–2, 0) e raio 3 f) não é uma bola

3. São verdadeiras (b), (d) e (e)

4. São conexos os conjuntos A, B e C

5. $3x\vec{i} + 3y\vec{j}$

6. $\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$

7. a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0,\ y \neq 0 \text{ e } z \neq 0\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$

f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$

g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z \geq 0\}$

h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

8. a) $\left(5, 2, \frac{1}{4}\right)$ b) $\left(e, 1, \frac{3}{2}\right)$ c) (3, 4, 2)

9. a) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ b) (0, 1, 1) c) $\left(6, \frac{3}{2}, 0\right)$

10. a) é contínua em $\mathbb{R}^2$ b) é contínua em $\mathbb{R}^3$

c) é contínua em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$

d) é contínua em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz > 0\}$

e) é contínua em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq y\}$

f) é contínua em $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

g) é contínua em $\mathbb{R}^3$

11. a) $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x} = 2xy^2z^2\vec{j} + yze^{xyz}\vec{k}$; $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \dfrac{1}{2}y^{-1/2}\vec{i} + 2x^2yz^2\vec{j} + xze^{xyz}\vec{k}$;

$\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z} = 2x^2y^2z\vec{j} + xye^{xyz}\vec{k}$

b) $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial x} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}\vec{i} + 2\vec{j}$; $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}\vec{i}$; $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial z} = \vec{0}$

c) $\dfrac{\partial \vec{h}}{\partial x} = 2x\vec{k}$; $\dfrac{\partial \vec{h}}{\partial y} = -2y\vec{j}$; $\dfrac{\partial \vec{h}}{\partial z} = -2z\vec{i}$

d) $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial x} = 2e^{2x}\vec{i} + ye^{3y}\vec{j}$; $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial y} = (3y+1)xe^{3y}\vec{j}$

e) $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial x} = \sqrt{y}\,\vec{i} + \ln y\vec{j}$; $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{y}}\vec{i} + \left(\dfrac{x-y}{y} - \ln y\right)\vec{j}$

f) $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x} = ye^{xy}\vec{i} + \dfrac{1}{x}\vec{j}$; $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial y} = xe^{xy}\vec{i}$; $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \dfrac{1}{z}\vec{j}$

12. $((x+y)e^{xy}, (y+z)e^{yz}, (x+z)e^{xz})$

14. é uma parábola no plano $z = 1$

15. a) $\left(\sqrt{3}\cos v, \sqrt{3}\,\text{sen}\, v, 6\right)$, $0 \le v \le 2\pi$; $(0, u, 3+u^2)$, $0 \le u \le 3$

b) $\left(0, 1, 2\sqrt{3}\right)$; $\left(-\sqrt{3}, 0, 0\right)$

16. $(0, 0, z^2(x^2+z^2)^{-3/2})$; $(0, 0, 0)$; $(z, 1, 0)$

17. $(0, 0, e^{yz}(yz+1))$; $(0, 0, (y^2z+2y)e^{yz})$

18. a) $(0, 0, 0)$; $\left(0, \dfrac{-1}{y^2}, 0\right)$; $(z, 0, 0)$; $(0, 0, 0)$; $\left(0, 0, \dfrac{2}{z^3}\right)$

b) $(-e^y\text{sen}\, x, e^x\text{sen}\, y, 0)$; $(e^y\text{sen}\, x, -e^x\text{sen}\, y, 0)$; $(e^y\cos x, e^x\cos y, 0)$;

$(-e^y\text{sen}\, x, e^x\cos y, 0)$; $(0, 0, 0)$

c) $\left(\dfrac{2}{x^3}, 0, 0\right)$; $\left(0, \dfrac{6}{y^4}, 0\right)$; $(0, 0, z)$; $(0, 0, 0)$; $(0, 0, 0)$

19. $(0, -4, -24)$

CAPÍTULO 4

SEÇÃO 4.2

8. a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ b) $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$

c) $\dfrac{21}{64}$ unidades de temperatura

10. a) $T = \left(r - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)k$

b) Superfícies esféricas de raio $r - \dfrac{k_1}{k}$ e centro na origem

11. a) família de circunferências centradas na origem

b) família de elipses centradas na origem

c) família de retas verticais

d) família de circunferências centradas em $(2, 4)$

12. a) $f(x, y, z) = k(1{,}5 - z)$ b) planos paralelos à base do tanque

13. $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

14. $f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ se } (x, y) = \left(\dfrac{ia}{m}, \dfrac{jb}{n}\right) (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n) \\ 0, \text{ nos demais casos} \end{cases}$

15. a) $y = \dfrac{cx}{2}$ b) $y = cx^2$

c) $x = c$ d) $y^2 = cx$

18. $f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

19. $h(x, y, z) = 1140 - z$, onde z é a altitude em $P(x, y, z)$

20. a) $\vec{f}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}$

b) $\vec{f}(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$

c) $\vec{f}(x, y) = \pm(y, -x)$

SEÇÃO 4.6

1. a) $4\sqrt{2}$ b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ e

2. $-\sqrt{2}$ 3. 1 4. $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ 5. $\dfrac{-6\sqrt{5}}{5}$ 6. 3

7. $(y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$

8. $2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 8z\vec{k}$ 9. $3y^3\vec{i} + (9xy^2 - 2)\vec{j}$

10. $\dfrac{1}{2}\sqrt{xyz}\left(\dfrac{1}{x}\vec{i} + \dfrac{1}{y}\vec{j} + \dfrac{1}{z}\vec{k}\right)$

11. $\dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + \vec{k}$

12. $e^{2x^2+y}\,4x\vec{i} + e^{2x^2+y}\vec{j}$

13. $\dfrac{y}{1 + x^2y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{1 + x^2y^2}\vec{j}$

14. $\dfrac{-2y}{(x - y)^2}\vec{i} + \dfrac{2x}{(x - y)^2}\vec{j}$

15. $2y\vec{i} + (2x + z^2)\vec{j} + \left(2yz + \dfrac{1}{z}\right)\vec{k}$

16. $\sqrt{\dfrac{z}{x + y}}\left(\dfrac{1}{2z}, \dfrac{1}{2z}, \dfrac{-(x + y)}{2z^2}\right)$

17. $2xze^{x^2-y}\vec{i} - ze^{x^2-y}\vec{j} + e^{x^2-y}\vec{k}$

26. $\theta = \arccos\dfrac{14}{\sqrt{221}}$

28. a) $4\vec{i} + 6\sqrt{2}\,\vec{j}$ b) $-4\vec{i} - \vec{j}$

c) $4\vec{i} + 4\vec{j}$ d) $5\vec{i} - \vec{j}$

29. a) (2, 5, 3) b) (0, 0, –1) c) (2, 2, –2)

31. $x + 2y - 3 = 0;\ x + 4y - 18 = 0$

32. $x + \sqrt{2}\,y - 2\sqrt{2} = 0$ 33. $2x + y + 5 = 0$

34. $x - y - 2 = 0$ 35. $y = 0$

36. $(1 - 2t)\vec{i} + (1 - 2t)\vec{j} + (1 + t)\vec{k}$

37. $(1 + 2t)\vec{i} + (1 + 2t)\vec{j} + (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,t)\vec{k}$; $(1 + 2t)\vec{i} + (1 + 2t)\vec{j} + (-\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,t)\vec{k}$

38. $(3 + 6t)\vec{i} + (4 + 8t)\vec{j} + (5 - 10t)\vec{k}$

39. $(1 + t)\vec{i} + \left(2 + \frac{1}{2}t\right)\vec{j} + \left(-3 + \frac{1}{3}t\right)\vec{k}$

40. $\left(\frac{1}{2} + t\right)\vec{j} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\vec{k}$

41. a) $4\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}\,e^{-2}$ c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

42. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{-20 + \sqrt{2}}{2}$

43. $2x + \frac{16}{3}y + \frac{2}{3}$ 44. $[(y + z)^2 + (x + z)^2 + (x + y)^2]^{1/2}$

45. $\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y$ 46. $-2\sqrt{x^2 + y^2}$ 47. $\frac{-x - y - z}{\sqrt{3(1 - x^2 - y^2 - z^2)}}$

48. $-2\sqrt{2} - 4$ 49. $-34\vec{i} + 10\vec{j}$ 50. $a\vec{i}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

51. a) $5\vec{i} + 5\vec{j}$; $-5\vec{i} - 5\vec{j}$
b) $-e^{-2}\vec{i} + 2e^{-2}\vec{j}$; $e^{-2}\vec{i} - 2e^{-2}\vec{j}$

52. a) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ c) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

53. a) $(2, -1)$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

54. $\frac{6 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{22}}$ 55. $\sqrt{5}$ 56. $2\sqrt{14}$

57. $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y}$ 58. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 59. 0

60. $(e^{-4t}, 2e^{-4t})$, $t \geq 0$ 61. $(2t + 2, t + 4)$, $0 \leq t \leq 1$

62. a) Sim b) $(t + 1, 3t + 1)$, $0 \leq t \leq 3$

63. a) Não b) $y = x$, $x \in [1, 10]$

64. $\frac{-6\sqrt{14}}{49}$; $\left(\frac{-4}{7\sqrt{7}}, \frac{-8}{7\sqrt{7}}\right)$ 65. $\sqrt{2}\,x - y - 1 = 0$

66. a) $(-8, -8, 4)$ b) $(1, 0, 0)$ c) $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{-2}{27}\right)$

67. $\frac{20}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

SEÇÃO 4.12

1. a) $\frac{2\sqrt{6}}{3}\vec{i} - \frac{5\sqrt{6}}{6}\vec{j}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{k}$ c) $\frac{1}{\sqrt{6}}(e^2\vec{i} + 3\vec{j})$

2. $\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{j}$

3. a) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ b) $\frac{-2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$ c) $2\sqrt{5}\,\vec{i} + \frac{8e^2\sqrt{5}}{5}\vec{j}$
d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

4. $\frac{\sqrt{78}}{6}$ 5. $\pm\vec{i}$ 6. $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

8. a) $\vec{i}$ b) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}\right)$ c) $\frac{-4}{\sqrt{5}}\vec{k}$

d) $\vec{0}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

9. a) $8x^3 + xe^w$ b) $2\text{sen } x \cos x$

c) $4xy^2 + 3xz + y^2$ d) $\frac{x+1}{x}$

10. a) Sim b) Sim c) Não

12. a) $3 - y$; $(1 - z)\vec{i} + \vec{j}$ b) $2(x - y)$; $2(x - y)\vec{k}$

c) $2(x + y + z)$; $\vec{0}$ d) $2e^x \cos y$; $2e^x \text{sen } y\ \vec{k}$

e) $yz^3 + 6xy^2 - x^2y$; $-x^2z\vec{i} + (3xyz^2 + 2xyz)\vec{j} + (2y^3 - xz^3)\vec{k}$

f) 0; $\frac{\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; g) $y^2z + 4xyz + 3xy^2$;

$(6xyz - 2xy^2)\vec{i} + (xy^2 - 3y^2z)\vec{j} + (2y^2z - 2xyz)\vec{k}$

13. a) $(-y\text{sen } xy - x\cos xy)\vec{k}$ b) $(-1 - 3x)\vec{i} + (3z - 2x^2)\vec{k}$ c) $-\vec{k}$

15. a) $2z$ b) $2(x + y + z)$ c) $(x - y)\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$ d) $\vec{0}$

e) $(2xyz - x^2z + 3xz^2)\vec{i} + (3yz^2 + y^2z + 2xyz)\vec{j} + (3x^2y - 2z^3 + 3xy^2)\vec{k}$

f) $z^2(x - y)\vec{i} + z^2(y - x)\vec{j} + (x - y)(y^2 - x^2)\vec{k}$ g) 0

16. a) $15 \text{ sen } 2 + 2$ b) 0

17. a) $(6x^2yz - x)\vec{i} + (2x^3z - \cos x)\vec{j} + (2x^3y + z)\vec{k}$

b) $12x^5yz + 2x^4z^2 + 2x^3y \text{ sen } x$

c) $(2x^3z\text{sen } x - 4x^4yz)\vec{i} + (2x^5y - 6x^2yz\text{sen } x - 2x^3yz\cos x)\vec{j} + (8x^3yz^2 - 2x^6z)\vec{k}$

18. $\vec{0}$ **19.** a) Sim b) Não c) Sim

d) Sim e) Não

21. a) Não b) Sim c) Sim d) Não

e) Sim f) Sim g) Sim

22. a) Sim b) Não c) Sim d) Sim

e) Sim

23. $-2\ln 2 - 2$ **24.** a) Sim b) Não

25. $-y^2 + 2xy + a(x)$

27. a) é conservativo em $\mathbb{R}^2$ b) é conservativo em D

c) não é conservativo em D d) é conservativo em D

e) não é conservativo em $\mathbb{R}^3$ f) não é conservativo em $\mathbb{R}^2$

g) é conservativo em $\mathbb{R}^3$ h) é conservativo em $\mathbb{R}^2$

28. a) Não b) Sim; $u = x - y\cos x + y + c$ c) Não

d) é conservativo em domínios simplesmente conexos que não contêm pontos da reta $y = -x$; $u = \ln|x + y| - \ln|x| - 3x + y^2 + xy^2 + c$

e) Sim; $u = 5x^2z - \cos xy + c$ f) Sim; $u = e^x + 2e^y + 3e^z + c$

29. a) $u = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + c$ b) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + c$ c) $u = xye^z + c$

CAPÍTULO 5

SEÇÃO 5.2

1. 12 **2.** $\frac{1}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$ **3.** 0

4. $-\frac{1}{27}+\frac{10\sqrt{10}}{27}$ 5. 0 6. 0 7. 6

8. $\frac{3a^3}{8}$ 9. $\frac{2048}{15}$ 10. $\frac{928}{27}\sqrt{5}\pi$ 11. 8

12. 0 13. $\frac{1}{12}\left[\left(1+\frac{2}{e}\right)^{3/2}-1\right]$ 14. $\frac{1}{4}$

15. 34 16. 0 17. 96π 18. $\frac{1}{2}$

19. 4π 20. $k(e^2-e^{-2})$ *u.m.* 22. $6\sqrt{20}+\sqrt{32}$ *u.m.*

23. $4k\pi$ *u.m.* 24. $8\sqrt{5}\,k\pi$ 25. $\frac{85}{4}\sqrt{10}\,k$

26. $\left(\frac{11}{7}, 0\right)$ 27. $\frac{k}{6}(17\sqrt{17}-1)$; $\left(\frac{391\sqrt{17}+1}{170\sqrt{17}-10}, 0\right)$

28. k *u.m.* 29. $\frac{k(7\sqrt{2}+12)}{3}$ 31. a) 0 b) $\frac{k\pi i}{R}$ c) $\frac{k\pi i}{R}$

SEÇÃO 5.4

1. $\ln\frac{3}{35}$ 2. 0 3. $\frac{3}{2}$ 4. 0

5. $-\pi$ 6. 8 7. $\frac{64}{3}\pi^3$ 8. $\frac{1}{4}$

9. -8 10. $-6k$ 11. 0 12. $\frac{-4}{3}+\ln 2$

13. $\frac{284}{7}$ 14. $\frac{112}{3}$ 15. 0 16. 1

17. 48π 18. 0 19. $\frac{5}{2}$ 20. $\frac{4096}{3}\pi^3$

21. $\pm 8\sqrt{2}\pi$ 22. -4 23. 0 24. 0

25. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3e}$ 26. a) $-\frac{2}{e}-4$ b) $\frac{2}{e}+\frac{13}{3}$ c) $\frac{-2}{e}-\frac{9}{2}$

27. a) 7 b) 7 c) 7 28. a) 6 b) $\frac{11}{2}$ c) -4

29. a) 8π b) 12π c) 4 30. a) 0 b) 0 c) 0

31. $1+2\cos 2-e^2$; $-4+\text{sen}\,2$; $3-e^2$ 32. 0 33. 0

34. 0 35. -4; HORÁRIO 36. 0 37. 0

SEÇÃO 5.6

1. a) Não b) Sim; $u=\text{sen}\,xy+e^y+z+c$; $\text{sen}\,1+\frac{1}{e}+\text{sen}\,6+e^6+1$

c) Sim; $u=xyz+\text{sen}\,x+\cos y+c$; $-\text{sen}\,1-\cos 1+\text{sen}\,2+\cos 3+6$

2. a) Sim; $u=xyz+4y^2+c$; $abc+4b^2$

b) Sim; $u=\frac{3}{7}(x+y+z)^{7/3}+c$; $\frac{3}{7}(a+b+c)^{7/3}$

c) Não d) Sim; $u=(\cos y+\text{sen}\,z)e^x+c$; $e^a(\cos b+\text{sen}\,c)-1$

e) Sim; $u=x^2+y^2+z^2+c$; $a^2+b^2+c^2$

3. a) $2\cos 1+\frac{3}{2}$ b) e^2-3 c) $\frac{14}{3}$

4. a) 16 b) $1 - e^2\cos 1$ c) 0 d) 5
e) $\operatorname{sen} 3 - \operatorname{sen} 1 - e^2 + e + 53$ f) $2e + e^{-2}$ g) 0

5. a) 0 b) $-\frac{\pi}{4}$ c) 0 d) -2π

6. -16 7. a) 0 b) -12 c) 0

8. a) 0 b) $\frac{\sqrt{257}}{4} - \sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{257}}{4} - \sqrt{2}$ d) 0

9. a) 0 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{10}}{20}$

11. a) 0 b) $-\pi$ 12. 1; igual 13. $e^{\sqrt{2}} - e - \sqrt{2}$

14. 0; 2π; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$ 15. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3}$

SEÇÃO 5.8

1. 8 2. -12π 3. -36 4. $-\frac{64}{3}$

5. $\frac{15}{2}$ 6. 72π 7. $\frac{3}{2}$ 8. 16π

9. $-\frac{3}{10}$ 10. 0 11. 0 12. 12π *u.a.*

13. 1 *u.a.* 14. a) 4π *u.a.* b) $\frac{5\pi}{2}$ *u. a.* 17. $\frac{221}{6}$

18. $18 - \frac{1}{6}(e^2 - e^5)$.

CAPÍTULO 6

SEÇÃO 6.3

1. a) elipsóide; b) $x = \pm\sqrt{\frac{24 - 3y^2 - 4z^2}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{24 - 2x^2 - 4z^2}{3}}$,
$z = \pm\sqrt{\frac{24 - 2x^2 - 3y^2}{4}}$

2. a) esfera; b) $x = \pm\sqrt{16 - y^2 - z^2}$, $y = \pm\sqrt{16 - x^2 - z^2}$,
$z = \pm\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

3. a) esfera; b) $x = \pm\sqrt{16 - (y-1)^2 - z^2} + 2$;
$y = \pm\sqrt{16 - (x-2)^2 - z^2} + 1$; $z = \pm\sqrt{16 - (x-2)^2 - (y-1)^2}$

4. a) elipsóide; b) $x = \pm\sqrt{\frac{1 - (y-1)^2 - (z-1)^2}{2}} + 1$;
$y = \pm\sqrt{1 - 2(x-1)^2 - (z-1)^2} + 1$; $z = \pm\sqrt{1 - 2(x-1)^2 - (y-1)^2} + 1$

5. a) plano; b) $x = \frac{10 - \sqrt{2}y + z}{2}$; $y = \frac{10 - 2x + z}{\sqrt{2}}$, $z = 2x + \sqrt{2}y - 10$

6. a) cilindro parabólico; b) $x = \pm\sqrt{z}$, $z = x^2$

7. a) cone; b) $x = \pm\sqrt{z^2 - y^2}$, $y = \pm\sqrt{z^2 - x^2}$, $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

8. $x = y^2 + z^2 - 1$ 9. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

10. $y = x^2$, $0 \le z \le 4$, $-2 \le x \le 2$ 11. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

12. $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$ 13. $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$

14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 4$

15. $x = 3\cos v \cos u + 1,\ y = 3\cos v \operatorname{sen} u + 2,\ z = 3\operatorname{sen} v,$

$0 \le u \le 2\pi, \quad \text{e} \quad \frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$

16. $x = u,\ y = v,\ z = u^2 + v^2 - 1$

17. $x = u,\ y = v,\ z = 8 - u - v$

18. $x = 2\cos u,\ y = v,\ z = 2\operatorname{sen} u,\ -\infty < v < +\infty \text{ e } 0 \le u \le 2\pi$

19. $x = 2 + 2\cos v \cos u,\ y = -1 + 2\cos v \operatorname{sen} u,\ z = 2\operatorname{sen} v,$

$0 \le u \le 2\pi \text{ e } \frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$

20. $x = \cos v \cos u,\ y = 1 + \cos v \operatorname{sen} u,\ z = \operatorname{sen} v,$

$0 \le u \le 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$

21. $x = \sqrt{2}\cos v \cos u,\ y = \sqrt{2}\cos v \operatorname{sen} u,\ z = \sqrt{2}\operatorname{sen} v$

$0 \le u \le 2\pi \text{ e } \frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$

22. $x = 2 + 4\cos v \cos u,\ y = -1 + 4\cos v \operatorname{sen} u,\ z = 3 + 4\operatorname{sen} v,$

$0 \le u \le 2\pi \text{ e } \frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$

23. $x = \sqrt{8}\cos v \cos u,\ y = \sqrt{8}\cos v \operatorname{sen} u,\ z = \sqrt{8}\operatorname{sen} v,$

$\frac{\pi}{2} \le u \le \pi \text{ e } 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

24. $x = \cos v \cos u,\ y = \cos v \operatorname{sen} u,\ z = \operatorname{sen} v,$

$0 \le u \le 2\pi \text{ e } \frac{\pi}{6} \le v \le \frac{\pi}{2}$

25. $x = \sqrt{3}\cos u,\ y = \sqrt{3}\operatorname{sen} u,\ z = v$

$0 \le u \le 2\pi \text{ e } -\infty < v < +\infty$

26. $x = 4\cos u,\ y = 4\operatorname{sen} u,\ z = v$

$\frac{\pi}{4} \le u \le \operatorname{arctg} 2,\ -2 \le v \le 2$

27. $x = \sqrt{10}\cos u,\ z = \sqrt{10}\operatorname{sen} u,\ y = v,$

$-\infty < v < +\infty,\ 0 \le u \le 2\pi$

28. $x = \frac{1}{\sqrt{5}} v\cos u,\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} v\operatorname{sen} u,\ z = \frac{2}{\sqrt{5}} v,$

$0 \le u \le 2\pi \text{ e } 0 \le v < \infty$

29. $x = u,\ y = v,\ z = 2\sqrt{u^2 + v^2}$

30. $x = u,\ y = v,\ z = -2\sqrt{u^2 + v^2}$

31. $x = u,\ y = v,\ z = \frac{2u^2 + 2v^2}{3}$

32. $x = u,\ y = v,\ z = \frac{3u^2 + 3v^2}{4}$

33. $x = u,\ y = 2u^2 + 2v^2,\ z = v,\ u^2 + v^2 \le 4$

34. $x = u,\ y = v,\ z = \sqrt{16 - u^2 - v^2},\ u^2 + v^2 \le 16$

35. $x = 2\cos v \cos u,\ y = 2\cos v \operatorname{sen} u,\ z = 2 + 2\operatorname{sen} v,$

$0 \le u \le 2\pi \text{ e } 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

36. $x = 6\cos v \cos u,\ y = 6\cos v \operatorname{sen} u,\ z = 6\operatorname{sen} v,$

$\frac{3\pi}{2} \le u \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$

37. $x = \cos v \cos u$, $y = \cos v \operatorname{sen} u$, $z = \operatorname{sen} v$,

$\frac{\pi}{4} \leq u \leq \operatorname{arctg} 2$ e $\frac{-\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

38. $x = v$, $y = 3\cos u$, $z = 3\operatorname{sen} u$, $0 \leq v \leq 4$ e $0 \leq u \leq 2\pi$

39. $x = 1 + \sqrt{13}\cos u$, $y = 3 + \sqrt{13}\operatorname{sen} u$, $z = v$

$0 \leq u \leq 2\pi$ e $-\infty < v < +\infty$

40. $x = \frac{1}{2} v\operatorname{sen} u$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2} v$, $z = \frac{1}{2} v\cos u$,

$0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v < \infty$

41. $x = u$, $y = 1 - \sqrt{u^2 + v^2}$, $z = v$, $u^2 + v^2 \leq 16$

42. $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2 - 1$, $1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$

43. $x = u$, $y = v$, $z = 4 - u - v$, $0 \leq u \leq 4$, $0 \leq v \leq 4 - u$

44. $x = u$, $y = \frac{9 - 2u}{3}$, $z = v$, $0 \leq u \leq \frac{9}{2}$, $-\infty < v < +\infty$

45. $x = u$, $y = v$, $z = 8 - v$, $u^2 + v^2 \leq 4$

SEÇÃO 6.7

1. a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos v, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos v, \operatorname{sen} v\right)$, $\frac{-\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$;

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u, \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} u, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $0 \leq u \leq 2\pi$

b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u, \frac{\sqrt{2}}{2}u, u^2\right)$, $0 \leq u \leq 2$; $(\sqrt{2}\cos v, \sqrt{2}\operatorname{sen} v, 2)$,

$0 \leq v \leq 2\pi$

c) $(u, 1, u^2 + 1)$, $(1, v, v^2 + 1)$

d) $\left(u, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4} - u^2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, v, \sqrt{\frac{3}{4} - v^2}\right)$

2. a) $x = u$, $y = v$, $z = 3\left(1 - u - \frac{1}{2}v\right)$; $\left(u, \frac{1}{2}, \frac{9}{4} - 3u\right)$; $\left(\frac{1}{4}, v, \frac{9}{4} - \frac{3}{2}v\right)$

b) $x = 3\cos u$, $y = 3\operatorname{sen} u$, $z = v$; $(3\cos u, 3\operatorname{sen} u, 4)$; $(3, 0, v)$

c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2} v\cos u$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2} v$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} v\operatorname{sen} u$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v < \infty$;

$\left(\sqrt{13}\cos u, \sqrt{13}, \sqrt{13}\operatorname{sen} u\right)$, $0 \leq u \leq 2\pi$;

$\left(\sqrt{\frac{2}{13}}v, \frac{\sqrt{2}}{2}v, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{13}}v\right)$, $0 \leq v < \infty$

3. b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u, 2u^2, \frac{\sqrt{2}}{2}u\right)$, $0 \leq u \leq 2$; $(\cos v, 2, \operatorname{sen} v)$, $0 \leq v \leq 2\pi$

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $(2\sqrt{2}, -1, 2\sqrt{2})$

4. b) $(\cos u, \operatorname{sen} u, \sqrt{3})$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$;

$(\sqrt{2}\cos v, \sqrt{2}\cos v, 2\operatorname{sen} v)$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

c) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2}, 1\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \sqrt{3} + \sqrt{3}t\right)$;

$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{3}z - 8 = 0$

5. a) $(4 + t, 1 - 2t, 2 - 4t)$ b) $\left(4 + \sqrt{5}\,t,\ 1 - 2\sqrt{5}\,t,\ 2 - 4\sqrt{5}\,t\right)$

c) $(3 + t, 2 - 4t, 4)$ d) $\left(\frac{1}{4} + t,\ \frac{1}{4} + t, \frac{1}{2} + t\right)$

e) $(1 + 2t, 1 + 2t, -2 + t)$ f) $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t,\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t,\ \sqrt{2} + t\right)$

g) $\left(1 - \frac{2}{3}t,\ 2 - \frac{5}{3}t,\ \frac{2}{3} + t\right)$

6. a) $(u, v, 3u^2v)$; $6x + 3y - z - 6 = 0$, $6x - 3y + z + 6 = 0$;

$(1 - 6t, 1 - 3t, 3 + t)$, $(-1 + 6t, 1 - 3t, 3 + t)$

b) $(u, v, u^2 + v^2)$; $2y - z - 1 = 0$, $2x + 2y + z + 2 = 0$;

$(0, 1 - 2t, 1 + t)$, $(-1 + 2t, -1 + 2t, 2 + t)$

c) (u, v, uv); $x + 2y - 2z - 1 = 0$, $\sqrt{2}\,x - z = 0$;

$\left(1 - \frac{1}{2}t,\ \frac{1}{2} - t,\ \frac{1}{2} + t\right)$, $\left(-\sqrt{2}\,t,\ \sqrt{2},\ t\right)$

d) $(u, v, 4 - u - 2v)$; $x + 2y + z - 4 = 0$; $x + 2y + z - 4 = 0$

$\left(1 + t,\ \frac{1}{2} + 2t,\ 2 + t\right)$, $(t, 1 + 2t, 2 + t)$

e) $(3\cos v \cos u, 3\cos v \operatorname{sen} u, 3\operatorname{sen} v)$ $0 \le u \le 2\pi$, $\frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$;

$x - 3 = 0$, $y - 3 = 0$, $z - 3 = 0$, $x + 2y + 2z - 9 = 0$;

$(3 + 9t, 0, 0)$, $(0, 3 + 9t, 0)$, $(0, 0, 3 + 6t)$,

$\left(1 + \sqrt{5}\,t,\ 2 + \frac{10}{\sqrt{5}}t,\ 2 + 2\sqrt{5}\,t\right)$

f) $(2\cos u, 2\operatorname{sen} u, v)$; $x + y - 2\sqrt{2} = 0$, $y - 2 = 0$;

$\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,t,\ \sqrt{2} + \sqrt{2}\,t,\ 2\right)$, $(0, 2 + 2t, 2)$

7. a) $4x + 4y + z - 4 = 0$ b) $z - 4y + 2 = 0$

8. $y = 2x$ e $z = x$

9. $\left(\frac{-2u\cos v}{\sqrt{4u^2 + 1}},\ \frac{-2u\operatorname{sen} v}{\sqrt{4u^2 + 1}},\ \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 1}}\right)$, $u \neq 0$

10. a) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\ \frac{-\sqrt{3}}{3},\ \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

SEÇÃO 6.11

1. $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ *u. a.* 2. $\frac{13\sqrt{13} - 1}{6}\pi$ *u. a.* 3. $30\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{5}$ *u. a.*

4. $\frac{13}{3}\pi$ *u. a.* 5. a) 9 *u.a.* b) $\frac{27}{2}\pi$ *u. a.*

6. 6π *u.a.* 7. $(18\pi - 36)$ *u.a.* 8. 32π *u.a.*

9. $12\pi\left(3 - \sqrt{5}\right)$ *u. a.* 10. $\frac{1}{6}\left(37\sqrt{37} - 17\sqrt{17}\right)\pi$ *u. a.* 11. $4\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$ *u. a.*

12. $4\pi\sqrt{17}$ *u. a.* 13. $4\sqrt{3}\pi$ *u. a.* 14. $\frac{\left(17\sqrt{17} - 1\right)}{6}\pi$ *u. a.*

15. $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ *u. a.* 16. $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$ *u. a.* 17. 3 *u.a.*

18. $\pi\left(36 - 8\sqrt{3}\right)$ *u. a.* 19. $\frac{64\sqrt{15}\pi}{9}$ *u. a.* 20. $\left(36 + 4\sqrt{21} + 4\sqrt{6}\right)$ *u. a.*

22. b) 8π *u.a.* 23. a) $x^2 + y^2 = z$

c) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$ *u. a.*

25. a) 2 b) 2 26. $\frac{243}{2}\pi$ 27. $\frac{\pi}{2}$ 28. $\frac{81}{2}$

29. $\frac{22\sqrt{14}}{3}$ 30. $\frac{2048\pi}{3}$ 31. $\frac{32768\sqrt{13}\pi}{81}$ 32. $\frac{2(17\sqrt{17}-1)}{3}$

33. $\frac{-37}{5}\pi$ 34. $\frac{-\pi}{4}$ 35. 0 36. $2\sqrt{2}\ln 2$ 37. $\frac{2\sqrt{5}\,k\pi}{3}$ *u. m.*

38. 9π 39. $20\sqrt{5}\,k\pi$ *u. m.* 40. (0, 0, 1)

41. a) $x^2 + y^2 = 16,\ 0 \le z \le 8$

c) $(8,\ 8\sqrt{3},\ 0)$ d) 1024π

42. b) $(-\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ 0),\ (-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 2\sqrt{3})$

c) $(6\sqrt{2},\ 6\sqrt{2},\ 4\sqrt{3})$ d) $\frac{2048\pi}{3}\,k$

SEÇÃO 6.13

2. a) 32 b) $-\frac{32}{3}$ c) $-\frac{32}{3}$

d) $-\frac{32}{3}$ e) 0; o fluxo é nulo

3. 4π 4. 0 5. 6 6. $\frac{\pi a^4}{2}$

7. $16\pi a^2$ 8. 18 9. -15π 10. $\frac{64}{3}$

11. $\frac{1}{2}$ 12. $\frac{32}{3}\pi$ 13. $\frac{20}{3}$ 14. 0

15. $\frac{208}{3}$ 16. $2\pi a^3(2-\sqrt{2})$ 17. a) 0 b) 0

18. 24; –24 19. a) $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right)$ b) -288π

20. 3π; -3π 21. 180π

SEÇÃO 6.16

1. –16 2. $\frac{\pm 3a^2\pi}{4}$ 3. 0 4. –16

5. $\pm$ (8sen 4 – 40) 6. π 7. 0 8. -2π 9. $\frac{-5a^4\pi}{4}$

10. -32π 11. 6π 12. $\frac{1}{4}$ 13. 24 14. 486π

15. 24 16. 0 17. 3π 18. 48 19. -45π

20. a) 0 b) 64π c) 0 21. -192π 22. 108